

## **Математическое моделирование прочности болтовых соединений композиционных материалов типа углепластиков**

*Национальный технический университет Украины «КПИ»,  
Государственное предприятие «Антонов»*

Исследовано влияние конструкторских и технологических факторов на прочность при растяжении болтовых соединений композиционных материалов типа углепластиков. Коррелированные факторы преобразованы и представлены как ортогональные. Полученная по результатам спланированного многофакторного эксперимента математическая модель удельной прочности позволила проанализировать влияние факторов на прочность композита и оптимизировать болтовое соединение. Приведены доли шести видов разрушения композиционного материала в зависимости от наиболее сильно влияющих факторов: количества болтов, их шагов и угла направления волокон.

**Ключевые слова:** болтовые соединения, композиционные материалы, планирование эксперимента, оптимизация соединения.

### **1. Постановка проблемы**

Композиционные материалы используются в конструкциях летательных аппаратов. Теоретические расчеты конструкторских и технологических факторов, влияющих на прочность болтовых соединений композиционных материалов, для инженерного использования затруднены и, в некоторых случаях, неизвестны. Предложено использовать экспериментально-статистический подход и теорию планирования многофакторного эксперимента для получения математических моделей влияния конструкторских и технологических факторов на прочность болтовых соединений.

### **2. Анализ достижений и публикаций**

В конструкциях летательных аппаратов широко применяются два основных вида соединений композиционных элементов между собой и с другими материалами: клеевые и болтовые. К преимуществам болтовых соединений относится технологичность, дешевизна, невысокая чувствительность к температурным и атмосферным воздействиям, большая надежность при длительной эксплуатации и возможность неразрушающей разборки. К существенным недостаткам следует отнести сложное прочностное поведение. Существующие методики и программы расчетов прочностных характеристик пока не обеспечивают надежных результатов расчетов: программы и методики могут существенно различаться для разных целей проектирования. В связи с этим необходимо их дополнение экспериментальными исследованиями.

В [1] показано, что в силу ряда специфических особенностей композитов их соединение механическим крепежом вызывает некоторые трудности, связанные с технологией сборки конструкций и отсутствием системы экспериментального обеспечения расчета на прочность и проектирования механических соединений. Сделан вывод, что инженерная методика проектирования механических соедине-

ний может успешно применяться, когда экспериментальные характеристики упругости и прочности определяются при максимально возможном соответствии с методикой расчета. Такой вывод указывает на идиографический подход, т. е. описание конкретных явлений в детальных условиях, к формализованному получению расчета на прочность механических соединений деталей из композитов.

В [2] приведена методика расчетов соединений, содержащих элементы из полимерного композиционного материала. Расчеты максимально приближены к реальной ситуации. Для моделирования использовался программный комплекс FEMAP/NX NASTRAN. В моделировании использовалась трехмерная геометрическая и конечно-элементная модель. Расчеты проводились для напряженно-деформированного состояния элементов соединения.

В [3] изложена проблема прочности болтовых соединений в перспективных конструкционных материалах – слоистых композиционных пластиках или ламинатах. На основе данных опубликованных трудов анализируются экспериментально установленные эффекты и обсуждаются основные факторы, которые влияют на прочность таких соединений и представляют интерес для теоретического исследования. Сделан вывод о достаточно сложной картине прочности болтовых соединений в ламинатах. Обращено внимание на трудности использования чисто экспериментального подхода к определению прочности болтовых соединений в слоистых композитах ввиду огромного количества вариантов материала, геометрии и нагружения. Указано на большое значение создания эффективных аналитических и численных моделей болтовых соединений. Конкретные решения не приведены.

### **3. Постановка задачи**

Анализ доступных публикаций показал, что применение расчетных методов возможно при использовании экспериментальных характеристик упругости и прочности, соответствующих методике расчета. Использование экспериментального подхода затруднено ввиду огромного количества вариантов соединений композиционных материалов.

Цель исследования – изучение влияния конструкторских и технологических факторов на прочность болтовых соединений композиционных материалов типа углепластиков при растяжении, направленном вдоль оси соединения, анализ результатов, моделирование объекта исследования, разработка рекомендаций для проектирования и оптимизация конструкции болтовых соединений по критерию максимальной удельной прочности. Экспериментальное исследование было проведено с использованием методики теории планирования эксперимента.

### **4. Получение и анализ математической модели**

Объект исследования – конструкция и технология изготовления болтовых соединений деталей из углепластика и металла для кия летательного аппарата, имеющих в регулярном сечении квазиизотропную укладку ламинатов.

Для проведения эксперимента использовался многофакторный регулярный план  $3^1 \times 4^7 \times 7^1 \times 8^1 // 64$ . Описание факторов приведено в табл.1. Откликом у служит разрушающая удельная нагрузка.

Как можно видеть из последнего столбца табл.1 натуральное значение ряда факторов не есть простым соответствием уровню, а вычисляется из кодированно-

го по формуле. Факторы  $X_1, X_3, X_4, X_7$ , вычисляются через диаметр болта  $X_2$ , относительная величина усиления ( $X_5$ ) определяется как  $k = \frac{\delta_y}{\delta_{\Pi}}$ , где  $\delta_y$  – толщина слоя усиления, а  $\delta_{\Pi}$  – толщина пластины до усиления.

Таблица 1.

## Описание факторов

Фактор	Название	Условное обозначение	Обозначение уровня в матрице плана эксперимента	Натуральное значение уровня
$X_1$	Толщина пластины болтового соединения с усилением, мм	$\delta_c$	$n_1 = -1; 0; 1$	$\delta_c = d + 2n_1 + dn_1/6$
$X_2$	Диаметр болта номинальный, мм	$d$	6; 8; 10; 12	6; 8; 10; 12
$X_3$	Величина перемычки вдоль действия силы (от центра отверстия до края пластины), мм	$a$	2; 2,5; 3; 4	$ad$
$X_4$	Величина перемычки поперек действия силы (от центра отверстия до края пластины), мм	$b$	2; 2,5; 3; 3,5	$bd$
$X_5$	Относительная величина усиления толщины пластины	$k$	0,2; 0,4; 0,6; 1	0,2; 0,4; 0,6; 1
$X_6$	Угол направления волокон в усиливающих слоях относительно направления действия силы, град	$\alpha$	0; 30; 60; 90	0; 30; 60; 90
$X_7$	Кол-во прослоек усиления	$n_2$	0; 1; 2; 3	$2 + (0,5d - 2)n_2$
$X_8$	Характер посадки болта в отверстии пластины	П	0; 1; 2; 3	H9/h6; H9/h6 d+0,1; H9 ГОСТ131042-79 H9/h6 BK-9;
$X_9$	Кол-во болтов и их шаг в соединении, мм	$m$	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6	1; 3×3,5d; 3×4d; 3×5d; 5×3,5d; 5×4d; 5×5d;
$X_{10}$	Разбиение плана на ортогональные блоки	Б	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

Фактор  $X_9$  является комбинированным, т. е. число болтов и их шаг связаны между собой функционально. Заметим, что в случае  $X_1$  и  $X_7$  формулы представляют собой преобразование нестандартного факторного пространства к гиперпараллелепипеду по причине статистической зависимости факторов  $X_1, X_2, X_7$  между собой. В связи с этим было выполнено преобразование факторного пространства к стандартному виду [4, с. 189–192]. Это связано с тем, что с основным фактором – номинальное значение диаметра болта  $X_2(d) = 6; 8; 10; 12$  (мм) – коррелированы два фактора: толщина пластин болтового соединения с усилением  $X_1(\delta_c)$  (мм) и количество прослоек усиления, распределенных равномерно по всей толщине пластины,  $X_7(n)$  (шт). На рис. 1 изображена область совместного существования факторов  $X_2(d), X_1(\delta_c)$  (трапеция) и  $X_2(d), X_{1\phi}$  ( $X_{1\phi} = n_1$ ), а на рис. 2 – факторов  $X_2(d), X_7(n)$  (трапеция) и  $X_2(d), X_{7\phi}$  ( $X_{7\phi} = n_2$ ).

Анализ областей показывает, что с увеличением диаметра болтов (фактор  $X_2(d)$ ) значения толщины пластины болтового соединения с усилением  $X_1(\delta_c)$  и количество прослоек усиления, распределенных равномерно по всей толщине пластины,  $X_7(n)$  увеличиваются пропорционально:

$$r_{ij}(X_2(d), X_1(\delta_c)) = 0,6141,$$

$$r_{ij}(X_2(d), X_7(n)) = 0,4804,$$

где  $r_{ij}(\bullet, \bullet)$  – коэффициент парной корреляции факторов.

В качестве уровней фиктивного фактора примем  $X_{1\phi} = -1; 0; 1$ , а для фактора  $X_{7\phi} = 0; 1; 2; 3$ . Составим таблицы сочетаний факторов  $X_2(d), X_{1\phi}, X_1(\delta_c)$  (табл. 2) и факторов  $X_2(d), X_{7\phi}, X_7(n)$  (табл. 3). По таблицам как планам экспериментов  $4^1 \times 3^1 // 12$  и  $4^2 // 16$  с использованием метода наименьших квадратов определяем необходимые зависимости:

$$X_1(\delta_c) = X_2(d) + [2 + (1/6) X_2(d)] X_{1\phi},$$

$$X_7(n) = 2 + [(X_2(d))/2 - 2] X_{7\phi}.$$

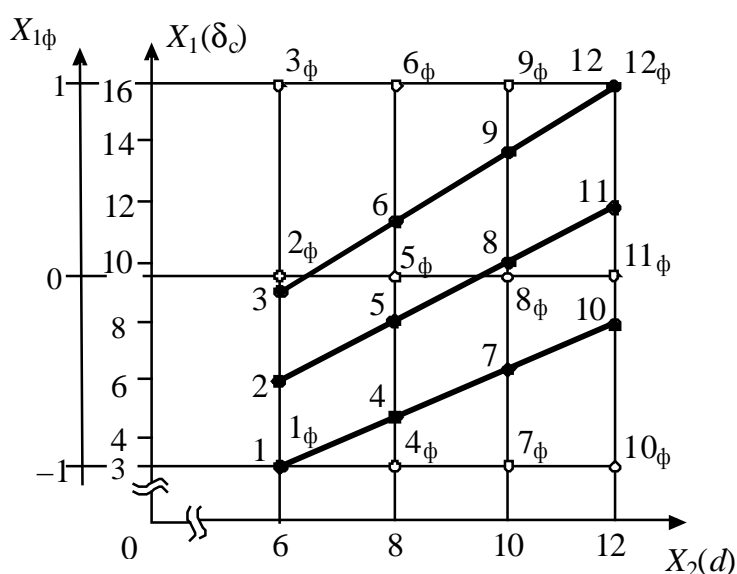


Рис. 1. Области совместного существования факторов  $X_2(d), X_1(\delta_c)$  и  $X_2(d), X_{1\phi}$

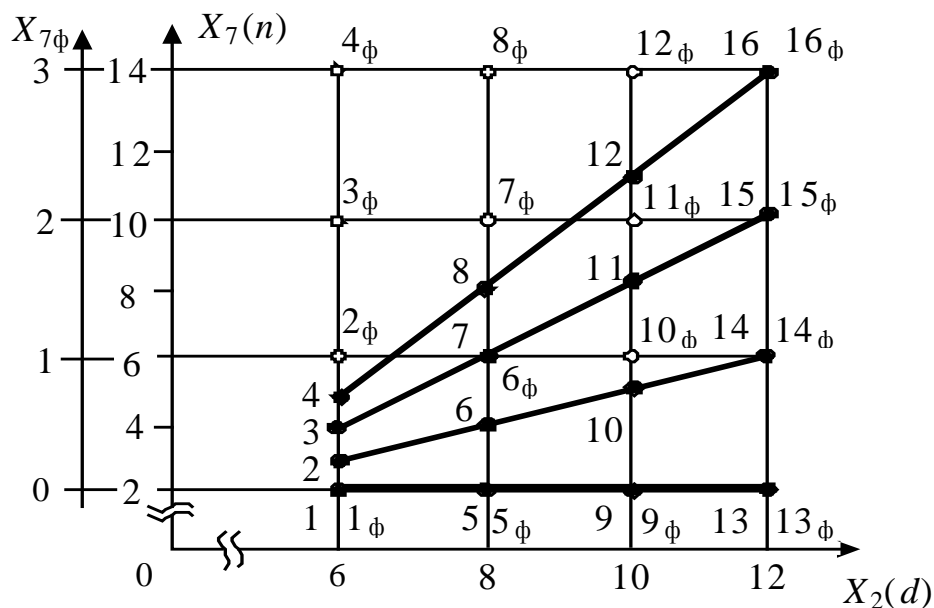


Рис. 2. Области совместного существования факторов  $X_2(d), X_7(n)$  и  $X_2(d), X_{7\phi}$

Таблица 2.

Рабочая матрица для факторов  $X_2(d), X_{1\phi}, X_1(\delta_c)$

Номер точки	Значения факторов		
	$X_2(d)$	$X_{1\phi}$	$X_1(\delta_c)$
1		-1	3,00
2	6	0	6,00
3		1	9,00
4		-1	4,67
5	8	0	8,00
6		1	11,33
7		-1	6,33
8	10	0	10,00
9		1	13,67
10		-1	8,00
11	12	0	12,00
12		1	16,00

Таблица 3.

Рабочая матрица для факторов  $X_2(d), X_{7\phi}, X_7(n)$

Номер точки	Значения факторов		
	$X_2(d)$	$X_{7\phi}$	$X_7(n)$
1		0	2
2	6	1	3
3		2	4
4		3	5
5		0	2
6	8	1	4
7		2	6
8		3	8
9		0	2
10	10	1	5
11		2	8
12		3	11
13		0	2
14	12	1	6
15		2	10
16		3	14

Для факторов  $X_2(d)$ ,  $X_{1\phi}$  и  $X_2(d)$ ,  $X_{7\phi}$  области совместного существования – прямоугольники, и коэффициенты парной корреляции между этими факторами равны нулю, так как факторы в парах ортогональны друг к другу.

Преобразование факторного пространства позволяет максимально устойчиво оценить коэффициенты получаемой статистической модели.

Отметим, что области совместного существования факторов  $X_2(d)$ ,  $X_1(\delta_c)$  и факторов  $X_2(d)$ ,  $X_{1\phi}$  топологически эквивалентны (гомеоморфны). Области совместного существования факторов  $X_2(d)$ ,  $X_7(n)$  и факторов  $X_2(d)$ ,  $X_{7\phi}$  также топологически эквивалентны (гомеоморфны). На рис. 1 точки 1, ..., 12 топологически эквивалентны (гомеоморфны) точкам  $1_\phi, \dots, 12_\phi$ . На рис. 2 точки 1, ..., 16 топологически эквивалентны (гомеоморфны) точкам  $1_\phi, \dots, 16_\phi$ .

С использованием ПС ПРИАМ (программное средство «Планирование, регрессия и анализ моделей») [4, с. 84–85; 5] получена регрессионная модель  $y$  разрушающей удельной нагрузки

$$y = 17,1655 + 8,66706x_9 - 3,67744z_6 - 3,98841z_9 + 3,0488x_6 + 1,47019z_1z_6 + \\ + 2,96134z_1g_7 - 3,66362x_2z_3 + 2,48469g_2g_3 + 2,27056x_1z_2 + 1,71714x_2g_7 + \\ + 1,54317x_2z_4 + 1,8424g_2x_6 + 1,50524z_1x_2 - 1,27199z_2x_7,$$

где  $x_1 = 0,888889(X_1 + 0,125)$ ;  $z_1 = 2,05664(x_1^2 - 0,153846x_1 - 0,481481)$ ;

$$x_2 = 0,333333(X_2 - 9); \quad z_2 = 2,25(x_2^2 - 0,555556);$$

$$g_2 = 3,75(x_2^3 - 0,911111x_2);$$

$$x_3 = 0,888889(X_3 - 2,875); \quad z_3 = 2,21484(x_3^2 - 0,285714x_3 - 0,432099);$$

$$g_3 = 6,52588(x_3^3 - 0,212121x_3^2 - 0,736925x_3 - 0,0317995);$$

$$x_4 = 1,333333(X_4 - 2,75); \quad z_4 = 2,25(x_4^2 - 0,555556);$$

$$x_6 = 0,0222222(X_6 - 45); \quad z_6 = 2,25(x_6^2 - 0,555556);$$

$$x_7 = 0,666667(X_7 - 1,5); \quad g_7 = 3,75(x_7^3 - 0,911111x_7);$$

$$x_9 = 0,296296(X_9 - 2,625); \quad z_9 = 2,0305(x_9^2 - 0,113821x_9 - 0,39369);$$

$X_{(\bullet)}$  – натуральные значения факторов;

$x_{(\bullet)}$ ,  $z_{(\bullet)}$ ,  $g_{(\bullet)}$  – линейные, квадратичные, кубические контрасты факторов.

Для получения модели были проанализированы 29 главных эффектов и 378 взаимодействий до четверных включительно. Факторы  $X_5$ ,  $X_8$ ,  $X_{10}$  не отражены в модели, так как их эффекты статистически незначимы.

Статистические характеристики наилучшей модели приведены в табл. 4 [6]. Модель имеет отличные информационные свойства, хорошую вычислительную стойкость, удовлетворительные описывающие свойства. К недостаткам относится формальная неадекватность модели по критерию Фишера и наличие 5 регрессоров ( $x_2z_3$ ,  $g_2g_3$ ,  $x_1z_2$ ,  $g_2x_6$ ,  $z_2x_7$ ), чье включение в модель сомнительно, так как они коррелированы с другими регрессорами более сильно, чем с откликом, однако на их долю приходится лишь 10,01 % общего рассеивания. Неадекватность предположительно связана с неоднородностью факторного пространства. Кластерный анализ приводит к разделению пространства эксперимента на два кластера,

включающих 46 и 18 опытов. Для получения более точной модели необходимо построить разные модели в соответствующих однородных областях.

Таблица 4.

Результаты статистического анализа математической модели  $Y$ 

Параметры статистического анализа		Условные обозначения	Значение параметров для модели
Проверка результатов опытов на однородность	Дисперсия воспроизводимости	$s_{\text{восп}}^2$	0,608812
	Среднеквадратическое отклонение	$s_{\text{восп}}$	0,780264
	Число степеней свободы для дисперсии воспроизводимости	$f_{\text{восп}}$	64
	Экспериментальное значение $G$ -критерия	$G^{\text{эксп}}$	0,131403
	Критическое значение $G$ -критерия	$G^{\text{крит}}$	0,165178
	Уровень значимости	$\alpha$	0,05
	Однородность данных		
Значение критерия Стьюдента ( $\alpha = 0,05$ ; $N = 64$ )		$t^{\text{крит}}$	2,00
Число обусловленности		$\text{cond}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$	1,91327
Проверка гипотезы об адекватности модели	Дисперсия адекватности	$s_{\text{ад}}^2$	7,45993
	Экспериментальное значение $F$ -критерия	$F^{\text{эксп}}$	12,2533
	Критическое значение $F$ -критерия для адекватности	$F^{\text{крит}}$	1,54931
	Число степеней свободы для адекватности	$f_{\text{ад}}$	49
	Уровень значимости	$\alpha$	0,05
	Адекватность модели		
Анализ полученной модели на информативность	Коэффициент множественной корреляции	$R$	0,958281
	Число степеней свободы для коэффициентов модели	$f_{k'}$	14
	Число степеней свободы для остаточной суммы квадратов	$f_{\text{ост}R}$	113
	Экспериментальное значение $F$ -критерия	$F^{\text{эксп}}$	39,3405
	Критическое значение $F$ -критерия для информативности	$F^{\text{крит}}$	1,78025
	Уровень значимости	$\alpha$	0,05
	Значение параметра для критерия Бокса и Веца	$\gamma$	4
	Информативность модели		
Среднее абсолютных величин погрешностей аппроксимации		$ \bar{e}_u $	1,92867
Доля рассеивания, объясняемая моделью		$Q_{\hat{y}}$	0,918302

Модель была принята для использования, так как позволяет с достаточной точностью прогнозировать прочность болтовых соединений и выполнять их проектирование. Особенности вида разрушения от двух факторов приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5.

Влияние количества болтов на вид разрушения

Кол-во болтов $m$	Вид разрушения, %					
	смятие	скол	раскол	расклинивание	разрыв	разрыв по 1-му ряду
1	28	53,2	15,6	–	3,2	–
3	4,2	6,2	35,4	14,6	4,2	35,5
5	–	4,2	37,5	14,5	4,2	39,6

Таблица 6.

Влияние угла направления волокон на вид разрушения

Угол направления волокон $\alpha$ , град	Вид разрушения, %					
	смятие	скол	раскол	расклинивание	разрыв	разрыв по 1-му ряду
0	3,1	28	62,5	6,2	–	–
30	6,5	6,5	42	19,3	3,2	22,5
60	3,1	15,6	25	6,2	6,2	43,8
90	15,6	31,2	3,2	6,2	6,2	37,6

В табл. 7 приведена доля, объясняемая частью регрессоров (для тех, для которых она больше 3 %). Как видно, основное влияние оказывает количество болтов и их шаг, а также угол направления волокон (наиболее высокая прочность образцов наблюдается при  $\alpha = 60^\circ$ ). Они объясняют 71,08 % общего рассеивания. Остальное рассеивание объясняют оставшиеся факторы во взаимодействии друг с другом. При этом, два взаимодействия из оставшихся – это взаимодействия с углом направления волокон.

Таблица 7.

Степень влияние некоторых регрессоров

Номер	1	2	3	4	5	6
Название	$x_9$	$z_6$	$z_9$	$x_6$	$z_1z_6$	$z_1z_7$
Доля влияния, %	38,09	16,78	8,39	7,82	4,20	3,11

На рис. 3–5 показан характер зависимости разрушающей удельной нагрузки  $u$  от наиболее значимых факторов.

## 5. Выводы

По результатам эксперимента получена многофакторная математическая модель, позволяющая прогнозировать прочностные свойства болтовых соединений композиционных материалов и оптимально их проектировать. Использование планирования эксперимента позволило получить надежную модель от большого количества факторов. Особенностью задачи является нестандартная область планирования экспериментов вследствие статистической зависимости факторов, которая была устранена за счет преобразования факторного пространства.

По полученной многофакторной модели были найдены оптимальные значения конструкторских и технологических факторов и результаты использованы при проектировании самолетов КБ им. О.К. Антонова.



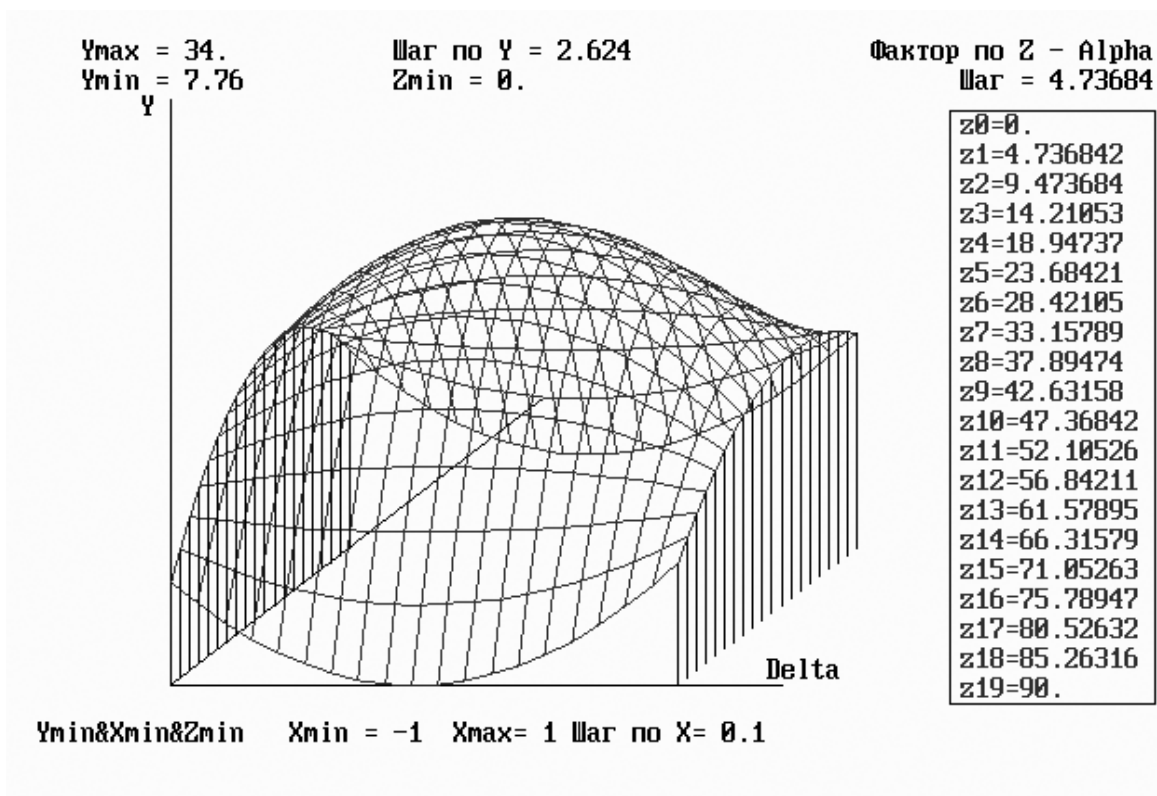


Рис. 3. Поверхность отклика в зависимости от толщины пластины и угла направления волокон

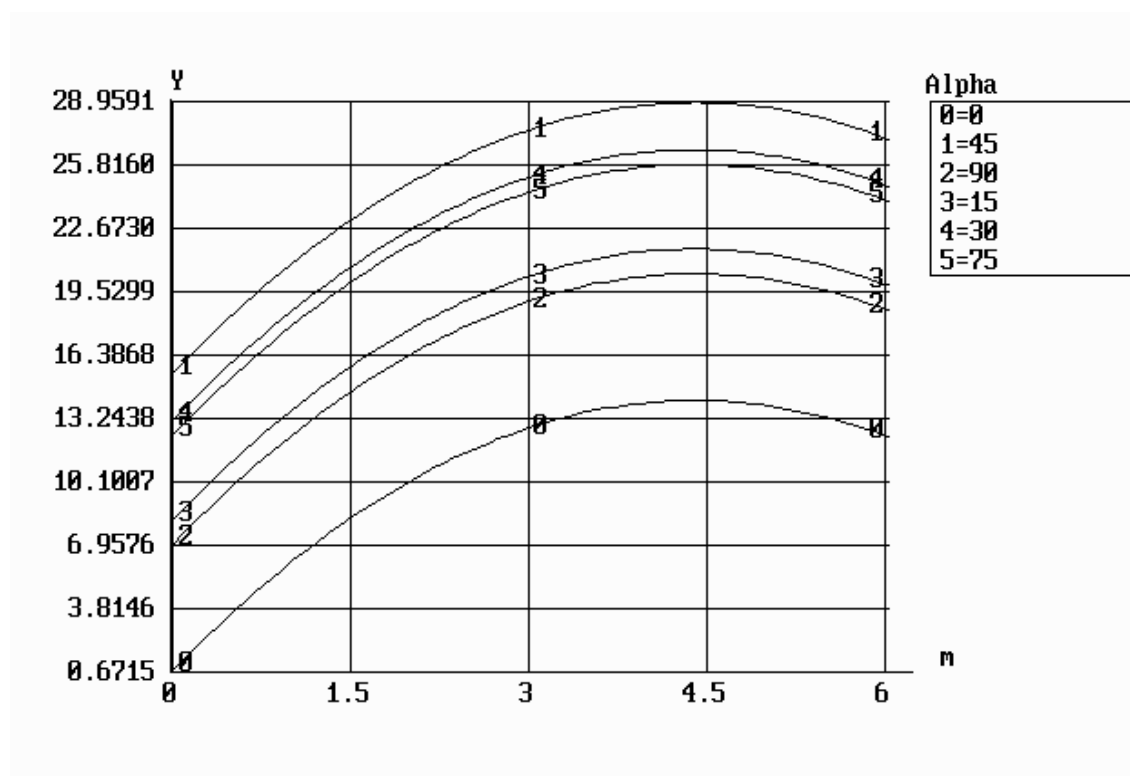


Рис. 4. Зависимость отклика от числа болтов и угла направления волокон

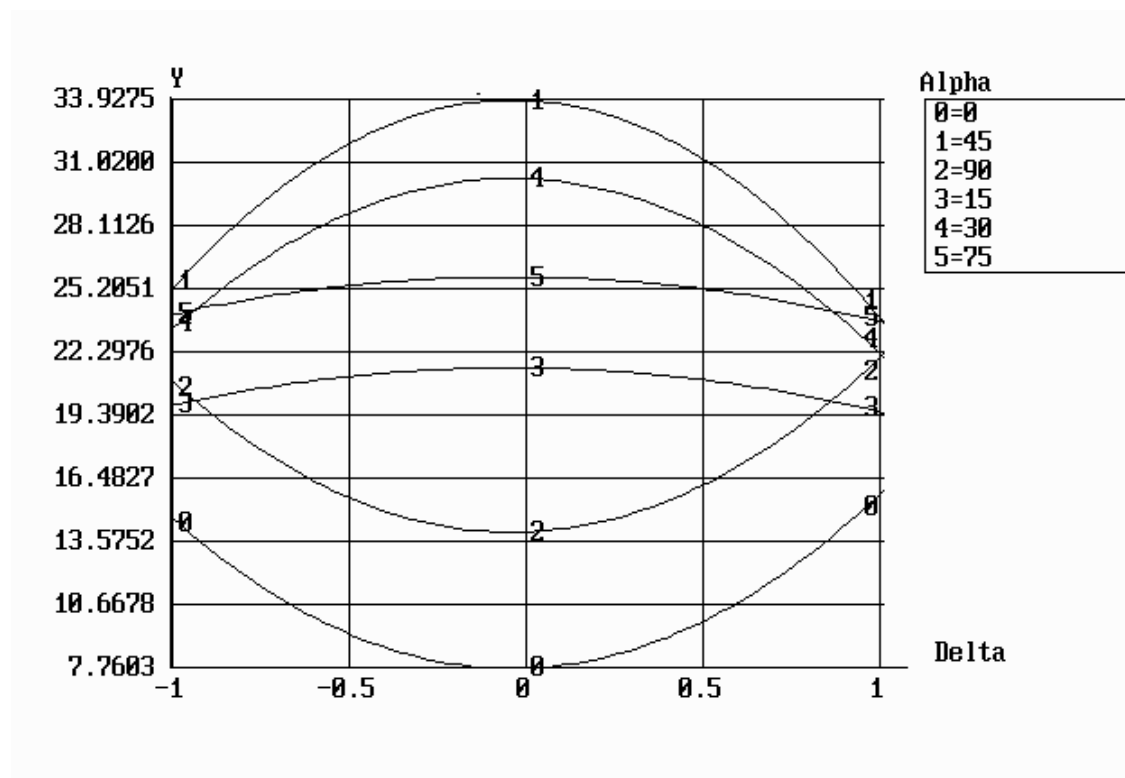


Рис. 5. Зависимость отклика от толщины пластины и угла направления волокон

С разработанными методами решения регрессионных задач и полученными результатами можно ознакомиться в [7, 8].

### Список литературы

1. Василевский Е.Т. Система экспериментального обеспечения расчета на прочность механических соединений деталей из композитов / Е.Т. Василевский, А.З. Двейрин, Я.С. Карпов, С.П. Кривенда // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. — 2010, № 47. — С.42–52.
2. Рудаков К.Н. Моделирование болтовых соединений из ПКМ в программном комплексе FEMAP/NX NASTRAN / Рудаков К.Н., Шукаев С.Н. // Вісник НТУУ «Київський політехнічний інститут», сер. Машинобудування. — 2013. — С.199–206.
3. Киркач А.Б. Проблемы прочности болтовых соединений на основе слоистых композиционных пластиков [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/OIKIT/2010/OIKIT47/p42-52.pdf>
4. Радченко С. Г. Методология регрессионного анализа. Монография / Радченко С. Г. — К.: «Корнійчук», 2011. — 376 с.
5. Лапач С.Н. Планирование, регрессия и анализ моделей PRIAM (ПРИАМ) / Лапач С.Н., Радченко С.Г., Бабич П.Н.. SCMC—90; 325, 660, 668 // Программные продукты Украины: каталог. = Software of Ukraine : Catalog. — К., 1993. — С. 24–27.
6. Радченко С.Г. Системное оптимальное планирование регрессионного эксперимента / С.Г. Радченко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2012. — Т. 78, № 7. — С. 71–75.
7. Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.n-t.org/sp/lesmi/>

8. Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publications/>

**Рецензент:** д.т.н., проф. С. Н.Шукаев, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев.  
Поступила в редакцию 12.02.2014

## **Математичне моделювання міцності болтових з'єднань композиційних матеріалів типу вуглепластиків**

Виконано дослідження впливу конструкторських і технологічних факторів на міцність при розтягненні болтових з'єднань композиційних матеріалів типу вуглепластиків. Виконане перетворення для представлення корельованих факторів як ортогональних. Побудована за результатами спланованого багатфакторного експерименту математична модель питомої міцності дозволила провести аналіз впливу факторів на міцність композиту і оптимізувати болтове з'єднання. Приведені частки шести видів руйнування композиційного матеріалу в залежності від найбільш сильно діючих факторів: кількості болтів, їх кроків і кута направлення волокон.

**Ключові слова:** болтове з'єднання, композиційні матеріали, планування експерименту, оптимізація з'єднання.

## **Mathematical modeling strength of bolt joints of composite materials like carbon fiber-reinforced plastics**

The research was dedicated to the influence of engineering and technology factors over longitudinal strength of bolt joints of composite materials like carbon fiber-reinforced plastics. Correlated factors were reconstituted and presented as orthogonal. The mathematical model of strength-density ratio, based on designed multi-factor experiment, made it possible to analyze the influence of factors over composite strength and optimize the bolt joints. The proportions of six types of composite material destruction are given, depending on the most influential factors: the number of joints, their spacing and thread direction angle

**Keywords:** bolt joints, composite materials, design of experiment, optimization of joint.