УДК 517.946

В. С. Проценко, Т. В. Денисова

Обобщенное интегральное преобразование Фурье на смешанном спектре и некоторые его приложения

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеца

Найдены новые формулы преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля со смешанным спектром. Эти формулы находят применение при решении новых задач математической физики: колебание составного четвертьпространства, теплопроводность анизотропной составной многолистной пластины и др.

Ключевые слова: преобразование Фурье, смешанный спектр, задачи математической физики, составные тела, многолистная пластина, точные решения.

Введение

Широкий класс задач математической физики успешно был решен с помощью классических и некоторых новых интегральных преобразований [1 – 3]. В связи с развитием авиационно-космической техники возникают новые задачи теплопроводности, теории упругости, теории потенциала и другие для составных и комбинированных тел и конструкций. Эти новые задачи требуют для своего решения новых интегральных преобразований. Одному типу таких преобразований и его приложению посвящена настоящая статья.

1. Обобщенное преобразование Фурье на смешанном спектре

Рассмотрим спектральную задачу на графе из N конечных одинаковых звеньев и одного полубесконечного звена, соединенных в точке $x = R$ (рис. 1). На графе имеем уравнение

$$y'' + \left(r\big/a_k^2 + \gamma_k^2\right) y = 0, \tag{1.1}$$

в котором a_k и γ_k – положительны, r – спектральный параметр.

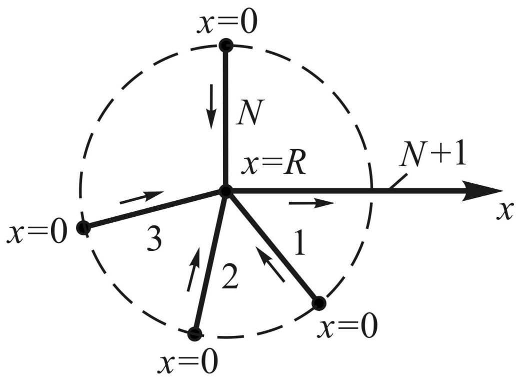

Рис. 1. Граф спектральной задачи

На коротких звеньях $k = 1$, на полубесконечном – $k = 2$.

Краевые условия на краях $x = 0$ примем такими:

$$h y_k(0) - b y_k'(0) = 0, \quad h > 0,\ b > 0,\ k = \overline{1,N}. \tag{1.2}$$

На бесконечности y_{N+1} – ограниченная.

В узле $x = R$ должны соблюдаться условия сопряжения:

$$\begin{cases} y_k(R) = y_{k-1}(R), \quad k = \overline{1, N+1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k y_k'(R) = \mu_{N+1} y_{N+1}'(R), \quad \mu_k > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Задача состоит в том, чтобы вектор-функцию $f(x)=(f_1, f_2, ..., f_{N+1})$, заданную на звеньях графа (на рис. 1 их изображено 5), представить в виде разложения по собственным функциям задачи (1.1) – (1.3) и указать формулы для определения коэффициентов этого разложения.

Задача (1.1) – (1.3) имеет смешанный спектр. Собственные функции, отвечающие точечному спектру, имеют вид

$$y_1(x,r_n)=(C_1\ C_2\ ...\ C_N\ \ 0)^T\cdot\varphi(x,r_n), \tag{1.4}$$

где r_n - корни уравнения $\varphi(R,r)=0$; $\varphi(x,r)=b\cos k_1x+hk_1^{-1}\sin k_1x$; $k_1^2=r/a_1^2+\gamma_1^2$; постоянные $C_k(n)$ связаны соотношением

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k C_k(n)=0. \tag{1.5}$$

Для непрерывной части спектра собственная функция такова:

$$y_2(x,r)=\begin{cases}(11\ldots1)^T\cdot\varphi(x,r), & x\in(0,R),\\ a\varphi'(R,r)\sin k_2(x-R)+\varphi(R,r)\cos k_2(x-R), & x>R,\ r\ge-\gamma_2^2a_2^2,\end{cases} \tag{1.6}$$

где $a=mN/(k_2\mu_{N+1})$; $m=\sum_{k=1}^{N}\mu_k$, $k_2^2=r/a_2^2+\gamma_2^2$.

Задача о разложении вектор-функции примет вид

$$f(x)=(f_1, f_2, ..., f_{N+1})^T=\sum_{n=1}^{\infty}y_1(x,r_n)+\int_{-\gamma_2^2a_2^2}^{\infty}C(r)y_2(x,r)dr, \tag{1.7}$$

где $r_n=(s_n^2-\gamma_1^2)\,a_1^2/R^2$, s_n – положительные корни уравнения

$$b\,s_n\cos s_n+hR\sin s_n=0,$$

а $C_k(n)$ удовлетворяют условию (1.5).

Отметим, что система функций $\varphi(x,r_n)$ – ортогональна и полна на $(0,R)$. Из равенства (1.7) найдем

$$C_1(n)-C_k(n)=\frac{1}{\|\varphi(x,r_n)\|^2}\int_0^R(f_1(x)-f_k(x))\varphi(x,r_n)dx,\quad k=2,3,...,N. \tag{1.8}$$

Вместе с условием (1.5) совокупность равенств (1.8) позволяет определить все $C_k(n)$ по формулам $(k=1,2,...,N)$:

$$C_k(n)=\alpha_k(n)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\alpha_j(n),\quad \alpha_j(n)=\frac{1}{\|\varphi(x,r_n)\|^2}\int_0^R f_j(\xi)\varphi(\xi,r_n)d\xi. \tag{1.9}$$

Сложим в (1.7) первые N равенств с весами μ_k и учтем (1.5). В результате найдем

$$F(x)=\int_{-q}^{\infty}C(r)\cdot s(x,r)dr,\quad x\in(0,\infty),\quad q=(a_2\gamma_2)^2, \tag{1.10}$$

где обозначено

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{N}\mu_k f_k(x), & x\in(0,R),\\ f_{N+1}(x), & x>R,\end{cases}$$

$$s(x,r)=\begin{cases}\varphi(x,r), & x\in(0,R),\\ a\varphi'(R,r)\sin k_2(x-R)+\varphi(R,r)\cos k_2(x-R), & x>R.\end{cases}$$

Функция $s(x,r)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $(0,R)\cup(R,\infty)$, краевому условию (1.2) в т. $x=0$, условиям сопряжения в т. $x=R$:

$$s(R-0)=s(R+0),\quad s'(R-0)=\nu s'(R+0),\quad \nu=\frac{\mu_{N+1}}{mN},$$

и ограничена на бесконечности.

Равенство (1.10) обратим с помощью метода, предложенного в работе [3]. В результате найдем:

$$C(r)=\frac{1}{\pi\cdot\nu}(k_2(r)\omega(r))^{-1}\int\limits_0^{\infty}F(\xi)\rho(\xi)s(\xi,r)d\xi, \qquad (1.11)$$

где принято

$$\rho(x)=\begin{cases}a_1^{-2}, & x\in(0,R),\\ a_2^{-2}/\nu, & x>R,\end{cases}\quad \omega(r)=[a\cdot\varphi'(R,r)]^2+\varphi^2(R,r).$$

Заменив γ_k на $i\gamma_k$ в (1.1), (1.10), (1.11), получим еще одно интегральное преобразование на составном промежутке $(0,\infty)$.

Из (1.10), (1.11) при $N=1$, $\mu_1=\mu_2$, $a_1=a_2=1$, $\gamma_1=\gamma_2=0$ получим формулы классического интегрального преобразования Фурье с условием третьего рода в т. $x=0$.

Следует также отметить тот факт, что при $N=1$ задача Штурма – Лиувилля (1.1) – (1.3) точечного спектра не имеет.

2. Некоторые задачи математической физики

2.1. Периодические колебания неоднородной четверти пространства

Четверть пространства ($x\ge 0$, $z\ge 0$, $y\in(-\infty,+\infty)$) составлена из двух частей (рис. 2) с разными материальными характеристиками: μ_k и ρ_k – соответственно модуль сдвига и плотность материала.

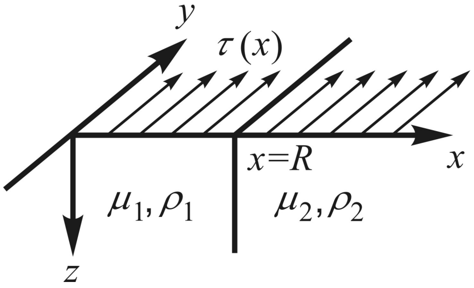

Рис. 2. Составное упругое тело

Грань $x=0$ упруго закреплена, а на плоскости $z=0$ действуют касательные усилия $\tau_{zy}=\tau(x)e^{i\lambda t}$, распределенные на участке $(a_1,b_1)\in(0,\infty)$.

Задача сводится к решению уравнения для амплитуды колебания [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\gamma_k^2 u=0\,,\quad \gamma_k=\lambda\sqrt{\frac{\rho_k}{\mu_k}}\,,\quad k=1{,}2\,, \qquad (2.1)$$

при краевом условии (1.2) и условиях сопряжения на линии $x=R$

$$u(R-0,z)=u(R+0,z),\quad \mu_1\cdot u_x'(R-0,z)=\mu_2\cdot u_x'(R+0,z).$$

При $z=0$ должно выполняться равенство $u_z'(x,0)=-\mu^{-1}(x)\cdot\tau(x)$, где $\mu(x)$ – кусочно-постоянный модуль сдвига.

Ограниченное на бесконечности решение задачи ищем в виде

$$u(x,z)=\int\limits_{-\gamma_2^2}^{\infty}A(r)e^{-\sqrt{r}\cdot z}s_1(x,r)dr\,. \qquad (2.2)$$

Функция $s_1(x,r)$ та же, что и $s(x,r)$ в (1.10), только при $a_1=a_2=1$, $N=1$.

Из (2.2) и краевого условия при $z=0$ имеем

$$\int\limits_{-\gamma_2^2}^{\infty}A(r)\sqrt{r}\cdot s_1(x,r)dr=\mu^{-1}(x)\cdot\tau(x),\quad x>0\,. \qquad (2.3)$$

По формуле обращения (1.11) находим

$$A(r)\sqrt{r}=\frac{1}{\pi\nu}(k_2(r)\omega(r))^{-1}\int\limits_{a_1}^{b_1}\mu^{-1}(\xi)\tau(\xi)\rho(\xi)s_1(\xi,r)d\xi\,. \qquad (2.4)$$

Найдено точное решение задачи

В формуле (2.2) выбираем $arg\sqrt{r}=0$ при $r>0$ и $arg\sqrt{r}=\pi/2$ при $r<0$. Только при таком выборе линии интегрирования функция (2.2) будет определять физически правильное решение [4] (описывать волны, уходящие на бесконечность).

2.2. Стационарная задача теплопроводности в составной многолистной анизотропной пластине

Распределение температуры $u(x,y)$ в анизотропной пластине (рис. 3) описывается уравнением

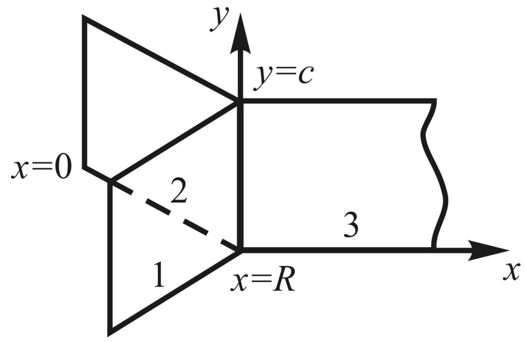

Рис. 3. Анизотропная составная пластина

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q_k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-b_k u=0\,, \qquad (2.5)$$

где b_k и q_k – коэффициенты теплообмена с окружающей средой и анизотропии материала соответственно.

Будем считать листы 1 и 2 одинаковыми с коэффициентами q_1, b_1, пластину 3 – с q_2, b_2.

На линиях $x=0$ примем краевые условия $hu-bu_x'=0$, при $y=0$ будем считать

$u=0$, а на $y=c$ примем $u'_y(x,c)=f(x)=(f_1,f_2,f_3)$, т.е. задан тепловой поток.

На бесконечности температура ограничена, в т. $x=R$ выполняются условия (1.3), в которых μ_k – коэффициенты теплопроводности.

С учетом условия при $y=0$ можем записать

$$u(x,y)=(u_1,u_2,u_3)^T = \int_{b_2/q_2}^{\infty} B(r)(1,1,1)^T sh\left(\sqrt{r}y\right)\cdot s_2(x,r)dr +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_1(n),C_2(n),0)^T \varphi(x,r_n)sh\left(\sqrt{r_n}\,y\right), \tag{2.6}$$

где функция $s_2(x,r)$ получается из $s(x,r)$, в которой нужно вместо γ_k подставить $i\sqrt{b_k}$, a_k заменить на $q_k^{-1/2}$ и положить $N=2$.

Условие на линии $y=c$ приводит к равенству

$$(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^T = \int_{b_2/q_2}^{\infty} B(r)(1,1,1)^T \sqrt{r}\cdot ch\left(\sqrt{r}c\right)\cdot s_2(x,r)dr +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_1(n),C_2(n),0)^T \sqrt{r_n}\cdot ch\left(\sqrt{r_n}\,c\right)\cdot\varphi(x,r_n). \tag{2.7}$$

Это равенство с учетом (1.9), (1.11) дает выражения для $C_k(n)$ и $B(r)$:

$$C_1(n)=\frac{\mu_2}{m}\cdot\frac{(\alpha_1(n)-\alpha_2(n))}{\sqrt{r_n}\cdot ch\left(\sqrt{r_n}c\right)},\quad C_2(n)=\frac{\mu_1}{m}\cdot\frac{(\alpha_2(n)-\alpha_1(n))}{\sqrt{r_n}\cdot ch\left(\sqrt{r_n}c\right)},\quad m=\mu_1+\mu_2, \tag{2.8}$$

$$B(r)\sqrt{r}\cdot ch\left(\sqrt{r}\,c\right)=\frac{1}{\pi N}(k_2(r)\omega(r))^{-1}\int_0^{\infty}F(\xi)\rho(\xi)\cdot s_2(\xi,r)d\xi,$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{m}(f_1(x)+f_2(x)), & x\in(0,R),\\ f_3(x), & x>R.\end{cases} \tag{2.9}$$

Таким образом, найдено точное решение задачи.

Замечание. Предложенным методом можно решить задачу колебания неоднородного слоя и задачу нестационарной теплопроводности многолистной пластины.

Выводы

1. Показано, что собственные функции рассмотренной задачи Штурма–Лиувилля со смешанным спектром образуют полную систему.
2. Даны формулы для коэффициентов разложения «произвольной» вектор-функции по собственным функциям смешанного спектра.
3. Указаны приложения нового интегрального преобразования к ранее не исследованным задачам математической физики и найдены точные решения двух таких задач.

4. Отмечены возможные обобщения предложенного метода на другие более сложные задачи.

Список литературы

1. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст] / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.

2. Трантер, К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике [Текст] / К. Дж. Трантер. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 204 с.

3. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] // Вопросы математической физики. – Л. : Наука, 1976. – С. 93 – 106.

4. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст] / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. В. А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 14.01.2014

Узагальнене інтегральне перетворення Фур’є на мішаному спектрі та деякі його застосування

Знайдено нові формули перетворення Фур’є за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля з мішаним спектром. Ці формули знаходять застосування при розв’язанні нових задач математичної фізики: коливання кусково-неоднорідного чвертьпростору, задачі теплопровідності анізотропної складеної багатолистої пластини та ін.

Ключові слова: перетворення Фур’є, мішаний спектр, задачі математичної фізики, складені тіла, багатолиста пластина, точні розв’язки.

Generalized integral Fourier transform on mixed spectrum and some of its applications

New formulas of the Fourier transform of the eigenfunctions of a Sturm – Liouville problem with mixed spectrum are founded. These formulas are used to solve new problems of mathematical physics: an oscillation of the composite quadrant, thermal conductivity of anisotropic composite multisheet plate and others.

Keywords: Fourier transform, mixed spectrum, problems of mathematical physics, composite bodies, multisheet plate, exact solutions.