

## Решение задач гидромеханики методом конечных элементов

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

Описано применение метода конечных элементов к решению широко распространенной в гидромеханике задачи безвихревого обтекания тела идеальной жидкостью. Двумерная модель течения в рассматриваемой задаче сформирована с использованием квадратичных треугольных элементов. Решение выполнено путем минимизации функционала на множестве узловых значений функции тока с использованием L-координат. Приведены некоторые особенности конечно-элементных схем, полезных для решения задач гидромеханики.

**Ключевые слова:** квадратичный треугольный элемент, квадратичный полином, функционал, безвихревое течение, функции формы, матрица Якоби.

Метод конечных элементов получил широкое распространение при решении инженерных и физических задач. В настоящее время в вычислительной гидромеханике [1 – 5] этот метод наиболее интенсивно развивается и постоянно расширяется область его применения.

Данный метод фактически представляет собой обобщение метода Рэлея-Ритца. Поэтому он применим к широкому классу уравнений в частных производных. Решение таких уравнений связано с минимизацией некоторого функционала.

В настоящей работе рассмотрено применение метода конечных элементов в задачах гидромеханики на примере безвихревого обтекания цилиндра. Данная задача может быть сформулирована с использованием функции тока  $\psi$ . Уравнение для функции тока в данной задаче имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Скорость течения выражается через функцию тока  $\psi(x, y)$  следующими формулами:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Для однозначного решения дифференциального уравнения (1) необходимо задать граничные условия. Будем считать, что нижняя граница совпадает с линией симметрии, а на верхней границе и на поверхности цилиндра выполняется условие непротекания. Тогда эти границы являются линиями тока. Значения функции тока на указанных границах приняты, как показано на рис. 1. На левой и правой границах принят линейный закон изменения функции тока.

Для построения модели двумерной дискретной области используем треугольники. Внутри каждого треугольника для искомой функции тока  $\psi$  применяем интерполяцию квадратичным полиномом



Рис. 1. Постановка граничных условий в расчетной области

$$\psi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (2)$$

В этом случае каждый треугольный элемент содержит шесть узлов (рис. 2).

В вариационном исчислении устанавливаем, что для минимизации функционала

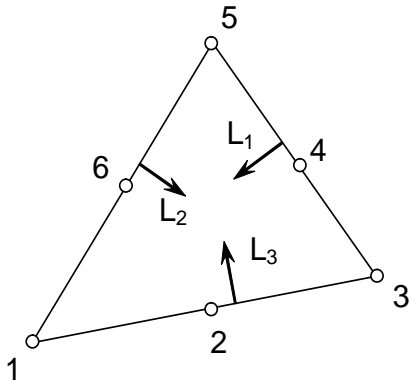


Рис. 2. L - координаты для квадратичного треугольного элемента

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dV \quad (3)$$

необходимо, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение (1) с граничными условиями, приведенными выше.

Минимизация функционала (3) осуществляется на множестве узловых значений  $\{\Psi\}$ . Для упрощения процесса минимизации функционала введем матрицу

$$\{g\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Соотношение (3) может быть теперь записано в виде

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left( \{g\}^T \{g\} \right) dV. \quad (5)$$

Учитывая, что функции от  $\psi$  не являются непрерывными во всей области, вместо них введем рассмотрение функции  $\psi^{(e)}$ , определенные на отдельных элементах. Интеграл в (5) разбиваем на интегралы по каждому элементу, что дает

$$\chi = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T \{g^{(e)}\} dV, \quad (6)$$

где  $E$  – общее число элементов. Выражение (6) можно записать как

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}, \quad (7)$$

где  $\chi^{(e)}$  – вклад от одного элемента в  $\chi$ . Минимизация  $\chi$  требует выполнения соотношения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Psi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Psi\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Psi\}} = 0. \quad (8)$$

Частные производные  $\partial \chi^{(e)} / \partial \{\Psi\}$  в выражении (8) не могут быть определены, пока интеграл (6) не будет выражен через узловые значения  $\{\Psi\}$ . Значения функции тока  $\psi$  внутри элемента можно выразить через узловые значения функции тока  $\{\Psi\}$  следующим образом:

$$\psi^{(e)} = \left[ N^{(e)} \right] \{ \Psi \}, \quad (9)$$

где  $N^{(e)}$  – функция формы или интерполяционная функция.

С учетом того, что дискретная область представлена в виде треугольников, для определения функций формы наиболее эффективно использование естественной системы координат. Эта система координат определяется тремя относительными координатами  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , изображенными на рис. 2. Функции формы для квадратичного треугольного элемента выражаются через  $L$ -координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 \cdot (2 \cdot L_1 - 1), \quad N_2 = 4 \cdot L_1 \cdot L_2, \quad N_3 = L_2 \cdot (2 \cdot L_2 - 1), \\ N_4 &= 4 \cdot L_2 \cdot L_3, \quad N_5 = L_3 \cdot (2 \cdot L_3 - 1), \quad N_6 = 4 \cdot L_1 \cdot L_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая соотношение (9), можно вычислить величину (4), которая вместе с (9) может быть подставлена в (6). Выражение для  $\{g^{(e)}\}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \{g^{(e)}\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_6^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_6^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} \text{ или} \\ & \{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{ \Psi \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $[B]$  содержит информацию, связанную с производными от функции формы.

Для вычисления производных  $\partial N_\beta / \partial x$  и  $\partial N_\beta / \partial y$  можно воспользоваться их связью с  $L$ -координатами:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где  $[J]$  – матрица Якоби.

Она имеет следующий вид:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Так как  $L$ -координаты не являются независимыми, следовательно, при определении производные  $\partial N_\beta / \partial L_1$  и  $\partial N_\beta / \partial L_2$  необходимо учитывать координату  $L_3$  следующим образом:

$$\frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_1} = \frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_1} - \frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_3}, \quad \frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_2} = \frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_2} - \frac{\partial N_{\beta}}{\partial L_3}. \quad (14)$$

Координаты любой точки, расположенной внутри треугольного элемента, можно выразить через координаты вершин треугольника следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= L_1 \cdot X_1 + L_2 \cdot X_3 + L_3 \cdot X_5, \\ y &= L_1 \cdot Y_1 + L_2 \cdot Y_3 + L_3 \cdot Y_5, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $X, Y$  – соответствующие координаты вершин треугольника 1, 3 и 5.

По аналогии с формулами (14) можно определить матрицу Якоби, учитывая выражения (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L_1} &= \frac{\partial x}{\partial L_1} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = X_1 - X_5, & \frac{\partial x}{\partial L_2} &= \frac{\partial x}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = X_3 - X_5, \\ \frac{\partial y}{\partial L_1} &= \frac{\partial y}{\partial L_1} - \frac{\partial y}{\partial L_3} = Y_1 - Y_5, & \frac{\partial y}{\partial L_2} &= \frac{\partial y}{\partial L_2} - \frac{\partial y}{\partial L_3} = Y_3 - Y_5. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, учитывая выражения (14) и (16), по формуле (12) можно найти производные  $\partial N_{\beta} / \partial x$  и  $\partial N_{\beta} / \partial y$  (табл. 1). В табл.1 приняты следующие обозначения:

$$a = X_1 - X_5, \quad b = Y_1 - Y_5, \quad c = X_3 - X_5, \quad d = Y_3 - Y_5, \quad rJ = 1 / (a \cdot d - b \cdot c).$$

Таблица 1

Производные  $\partial N_{\beta} / \partial x$  и  $\partial N_{\beta} / \partial y$

Тип производной	Значение производной в L-координатах
$\partial N_1 / \partial x$	$rJ \cdot (-d + 4 \cdot d \cdot L_1)$
$\partial N_1 / \partial y$	$rJ \cdot (c - 4 \cdot c \cdot L_1)$
$\partial N_2 / \partial x$	$rJ \cdot (-4 \cdot b \cdot L_1 + 4 \cdot d \cdot L_2)$
$\partial N_2 / \partial y$	$rJ \cdot (4 \cdot a \cdot L_1 - 4 \cdot c \cdot L_2)$
$\partial N_3 / \partial x$	$rJ \cdot (b - 4 \cdot b \cdot L_2)$
$\partial N_3 / \partial y$	$rJ \cdot (-a + 4 \cdot a \cdot L_2)$
$\partial N_4 / \partial x$	$rJ \cdot [4 \cdot (b - d) \cdot L_2 - 4 \cdot b \cdot L_3]$
$\partial N_4 / \partial y$	$rJ \cdot [4 \cdot (c - a) \cdot L_2 - 4 \cdot a \cdot L_3]$
$\partial N_5 / \partial x$	$rJ \cdot [(d - b) + 4 \cdot (b - d) \cdot L_3]$
$\partial N_5 / \partial y$	$rJ \cdot [(a - c) + 4 \cdot (c - a) \cdot L_3]$
$\partial N_6 / \partial x$	$rJ \cdot [4 \cdot (b - d) \cdot L_1 + 4 \cdot d \cdot L_3]$
$\partial N_6 / \partial y$	$rJ \cdot [4 \cdot (c - a) \cdot L_1 - 4 \cdot c \cdot L_3]$

Учитывая выражение (11), минимизацию функционала  $\chi$ , формулу (6) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \cdot [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] dV \cdot \{\Psi\} = 0,$$

или

$$[k^{(e)}] \cdot \{\Psi\} = 0. \tag{17}$$

Каждый элемент матрицы  $[k^{(e)}]$  определяется в соответствующем конечном элементе. Так как задача плоская, то интегрирование проводим по площади  $A^{(e)}$  каждого элемента:

$$[k^{(e)}] = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] dA^{(e)}. \tag{18}$$

Для универсального выполнения интегрирования выражения (18) следует каждый элемент матрицы  $[B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}]$  записать в общем виде:

$$\left( [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] \right)_{\text{элемент}} = A + BL_1 + CL_2 + DL_3 + EL_1L_2 + FL_2L_3 + \\ + GL_1L_3 + HL_1^2 + IL_2^2 + JL_3^2, \tag{19}$$

где  $A, B, \dots, J$  – коэффициенты в виде чисел, полученные в результате перемножения матриц  $[B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}]$ , используя выражение (11) и табл. 1.

Преимуществом использования L-координат является существование интегральных формул, упрощающих вычисление интегралов по его площади [1]:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \tag{20}$$

Результаты интегрирования выражения (19) с помощью формулы (20) приведены в табл. 2.

Для однозначного решения системы (17) необходимо задать узловые значения  $\Psi$  для тех узлов, для которых заданы граничные условия. Результаты расчетов показаны на рис. 3 – 4.

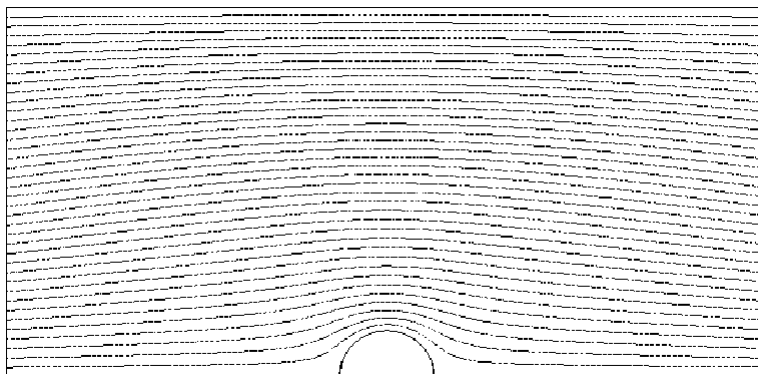


Рис. 3. Представление линий тока в расчетной области

## Результаты интегрирования

Интеграл	Результат интегрирования
$\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} AdA^{(e)}$	$A \cdot A^{(e)}$
$\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} BL_1dA^{(e)}, \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} CL_2dA^{(e)},$ $\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} DL_3dA^{(e)}$	$\frac{1}{3}B \cdot A^{(e)}, \frac{1}{3}C \cdot A^{(e)}, \frac{1}{3}D \cdot A^{(e)}$
$\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} EL_1L_2dA^{(e)}, \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} FL_2L_3dA^{(e)},$ $\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} GL_1L_3dA^{(e)}$	$\frac{1}{12}E \cdot A^{(e)}, \frac{1}{12}F \cdot A^{(e)},$ $\frac{1}{12}G \cdot A^{(e)}$
$\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} HL_1^2dA^{(e)}, \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} IL_2^2dA^{(e)},$ $\frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} JL_3^2dA^{(e)}$	$\frac{1}{6}H \cdot A^{(e)}, \frac{1}{6}I \cdot A^{(e)}, \frac{1}{6}J \cdot A^{(e)}$

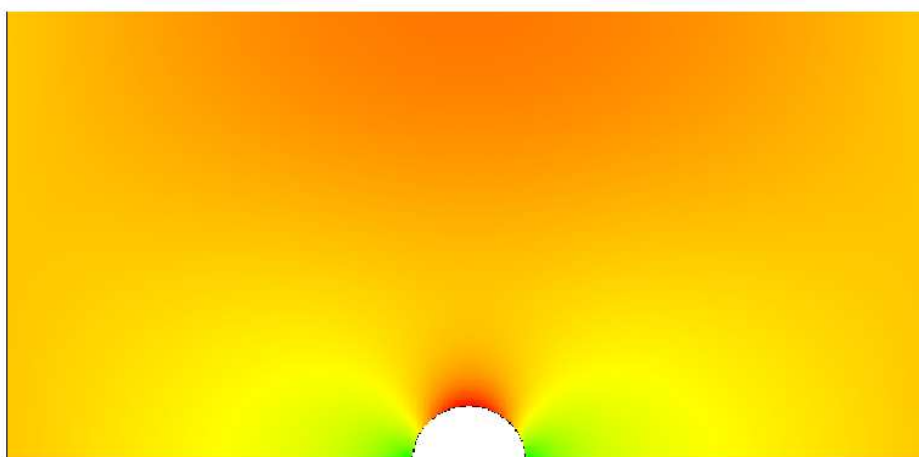


Рис. 4. Представление изменения модуля скорости в области течения

В описанном выше методе конечных элементов в отличие от метода конечных разностей вычисляем не искомые функции, а только их коэффициенты в разложениях по базисным функциям, что позволяет получать решение в любой точке области и повышает точность расчетов. Кроме того, можно отметить, что в некоторых случаях схемы метода конечных элементов обладают "суперсходимостью", т.е. точным решением задач в узлах сетки [4].

Метод позволяет использовать элементы с разными размерами. Это дает возможность измельчать расчетную область вблизи обтекаемых объектов [1]. При рассмотрении обтекания сложной криволинейной поверхности можно её аппроксимировать с помощью криволинейных элементов [2,3].

Метод конечных элементов обладает существенными преимуществами по сравнению с другими численными методами, применяемыми в задачах гидромеханики. Наибольший интерес представляет также применение описанного метода в трехмерных задачах обтекания сложных объектов вязкими газами.

#### Список литературы

1. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд – М.: Мир, 1979. – 392 с.
2. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
3. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. Крашаница, Ю. А. Автоматизация теоретических и экспериментальных исследований в аэродинамике [Текст]: учеб. пособие / Ю.А. Крашаница, Д.П. Шаройко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т.", 2003. – 129 с.
5. Тюрёв, В.В. Численные методы аэрогидродинамики [Текст]: учеб. пособие / В.В. Тюрёв, В.А. Тараненко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т. Н.Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т.", 2013. – 180 с.

**Рецензент:** к.т.н., доц., проф. В. А. Грайворонский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», г. Харьков  
Поступила редакцию 14.01.2014

### Рішення задач гідромеханіки методом кінцевих елементів

Описано застосування методу кінцевих елементів до розв'язання широко розповсюдженої в гідромеханіці задачі безвихрового обтікання тіла ідеальною рідиною. Двовимірну модель плин у розглянутому завданні сформовано з використанням квадратичних трикутних елементів. Рішення виконано шляхом мінімізації функціонала на безлічі вузлових значень функції струму з використанням L-координат. Наведено деякі особливості кінцево-елементних схем, корисних для вирішення задач гідромеханіки.

**Ключові слова:** квадратичний трикутний елемент, квадратичний поліном, функціонал, безвихровий плин, функції форми, матриця Якобі.

### Decision problems in fluid mechanics by finite element method

The paper described application the finite element method to solve the problem of irrotational flow-around a body by an ideal liquid. The tow-dimensional model of current in a considered problem is generated with use of square law triangular elements. The solutions are found through minimization of the functional on set points of the stream function, with use of L-coordinates. The paper presented singularities finite elements schemes useful to solution of hydromechanics problems.

**Keywords:** square law triangular elements, square law polynomial, functional, irrotational flow, the barycentric coordinate system, the Jacobian matrix.