

Равновесие ортотропной пластины, ослабленной двумя параллельными разрезами

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тонкой ортотропной пластины с двумя разрезами на параллельных осях анизотропии. Он основан на применении соотношений между базисными решениями уравнения Лапласа в различных эллиптических системах координат и приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет выполнить эффективный анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности концентраторов напряжений, в частности получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

Ключевые слова: ортотропная пластина, разрез, система координат, гармоническая функция, коэффициент.

Введение

Существует лишь небольшое число публикаций, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство связано с существенными математическими трудностями построения эффективных методов точной реализации граничных условий.

Актуальность соответствующих исследований для инженерных применений определяется тем, что относительно прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи отверстий, разрезов (трещин), включений и т.д. Получение достоверной и полной информации о распределении напряжений в указанных зонах непосредственно связано с применением аналитических методов решения краевых задач теории упругости. В обзорных статьях [1, 2] с достаточной полнотой представлена история проблемы исследования закономерностей напряженного состояния в анизотропных телах.

Начала реализуемого здесь подхода заложены в работах [3, 4], где получены новые общие решения уравнений равновесия двумерных (плоских) задач теории упругости для ортотропных тел, ограниченных координатными линиями декартовой, параболической и эллиптической систем координат.

1. Общие положения

Пусть δ_1, δ_2 ($\delta_j > 0, j=1,2$) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \gamma = \frac{E_1}{E_2} \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\gamma \geq 0),$$

где $E_1 = E_x$; $E_2 = E_y$ – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей x и y ; $G_{12} = G_{xy}$ – модуль сдвига в плоскости Oxy ; $\nu_{12} = \nu_{xy}$ – коэффициент Пуассона. В силу симметрии этих формул относительно δ_1, δ_2 имеем

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}$$

либо

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}.$$

Частные решения двумерных уравнений равновесия ортотропных в осях x и y пластин представим в виде [3, 4]

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial y} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\delta_j^{-2} \sigma_x^{(j)}; \quad (1)$$

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + \nu_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a(\delta_{3-j}^2 + \nu_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j \quad (j=1,2), \quad (2)$$

где $I_j = I_j(x, y_j)$ – гармонические функции переменных $x, y_j = \delta_j y$, a – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. При этом в формулах (2) I_j и $\int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j$ – сопряженные гармонические функции переменных x, y_j .

Положим

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)},$$

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \quad (3)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ ($\omega^2 \neq 4\gamma$) представления (3) компонент тензора напряжений и вектора перемещений являются общими (функции I_j линейно независимы). В случае $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ($\omega^2 = 4\gamma$) функции I_1, I_2 образуют линейно зависимую систему, и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции I_1), либо в исходной краевой задаче ($\delta_1 \neq \delta_2$) осуществить предельный переход $\delta_2 \rightarrow \delta_1 = \delta$.

Общие решения (3) в сочетании с обобщенным методом Фурье позволяют получить простые выражения для проекций вектора перемещений и вектора сил на границах ортотропных эллиптических пластин и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач.

Пусть $\langle x, y \rangle$, $\langle \xi, \theta \rangle$ – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x = ach\xi \cos \theta, \quad y = ash\xi \sin \theta \quad (a > 0; 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (4)$$

Уравнение $\xi = \xi_0 = const$ определяет вытянутый вдоль оси Ox эллипс

$$\frac{x^2}{(ach\xi_0)^2} + \frac{y^2}{(ash\xi_0)^2} = 1. \quad (5)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ каждую из гармонических функций I_j ($j=1,2$) будем рассматривать как функцию эллиптических координат ξ_j, θ_j , определяемых формулами

$$x_j = x = a_j ch\xi_j \cos \theta_j, \quad y_j = \delta_j y = a_j sh\xi_j \sin \theta_j \quad (a_j > 0; 0 \leq \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi). \quad (6)$$

Уравнение $\xi_j = \xi_{j0} = const$ задает эллипс

$$\frac{x_j^2}{(a_j ch\xi_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(a_j sh\xi_{j0})^2} = \frac{x^2}{(a_j ch\xi_{j0})^2} + \frac{(\delta_j y)^2}{(a_j sh\xi_{j0})^2} = 1 \quad (j=1,2),$$

совпадающий с исходным эллипсом (5) при условии, что

$$a_j ch\xi_{j0} = ach\xi_0, \quad a_j sh\xi_{j0} = \delta_j ash\xi_0 \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Тогда из соотношений (4), (6), (7) следует, что на границах $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ эллиптических областей $0 \leq \xi < \xi_0$, $0 \leq \xi_j < \xi_{j0}$; $\xi_0 < \xi < \infty$, $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$ выполняются равенства $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

Проекции $F_x^{(j)}$, $F_y^{(j)}$; F_x , F_y векторов сил $\vec{F}_j = F_x^{(j)}\vec{e}_x + F_y^{(j)}\vec{e}_y$, $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$ на границах $\xi_j = \xi_{j0}$, $\xi = \xi_0$ областей $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$, $\xi_0 < \xi < \infty$, соответствующие частным решениям (1) и общему решению (3) уравнений равновесия, имеют вид [3, 4]

$$F_{x/\xi_j=\xi_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j / \xi_j = \xi_{j0}}, \quad F_{y/\xi_j=\xi_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j / \xi_j = \xi_{j0}};$$

$$F_{x/\xi=\xi_0} = F_{x/\xi_1=\xi_{10}}^{(1)} + F_{x/\xi_2=\xi_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\xi=\xi_0} = F_{y/\xi_1=\xi_{10}}^{(1)} + F_{y/\xi_2=\xi_{20}}^{(2)}; \quad (8)$$

$$h_0 = \sqrt{ch^2 \xi_0 - \cos^2 \theta}; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad (\xi_j = \xi_{j0}, \xi = \xi_0).$$

В предельном случае $\xi_0 = 0$ ($\xi_{j0} = 0$) эллипсы $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $|x| \leq a$, $y = \pm 0$, причем $a_j = a$, $h_0 = |\sin \theta|$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Введем теперь координатные системы $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle, \langle \bar{\xi}, \bar{\theta} \rangle, \langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle, \langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle$, связанные с координатными системами $\langle x, y \rangle, \langle \xi, \theta \rangle, \langle x_j, y_j \rangle, \langle \xi_j, \theta_j \rangle$ соотношениями

$$\bar{x} = ach\bar{\xi} \cos \bar{\theta}, \quad y = ash\bar{\xi} \sin \bar{\theta} \quad (0 \leq \bar{\xi} < \infty, 0 \leq \bar{\theta} \leq 2\pi); \quad (9)$$

$$\bar{x}_j = \bar{x} = a_j ch\bar{\xi}_j \cos \bar{\theta}_j, \quad \bar{y}_j = \delta_j \bar{y} = a_j sh\bar{\xi}_j \sin \bar{\theta}_j \quad (0 \leq \bar{\xi}_j < \infty, 0 \leq \bar{\theta}_j \leq 2\pi); \quad (10)$$

$$\bar{x} = x = x_j = \bar{x}_j, \quad \bar{y} = -y - 2h, \quad \bar{y}_j = -y_j - 2\delta_j h \quad (h > 0; j = 1, 2).$$

Ввиду идентичности структур формул (4), (6) и (9), (10) на границах $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$ эллиптических областей $0 \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}_0, 0 \leq \bar{\xi}_j < \bar{\xi}_{j0}, \bar{\xi}_0 < \bar{\xi} < \infty, \bar{\xi}_{j0} < \bar{\xi}_j < \infty$ имеем

$$a_j ch\bar{\xi}_{j0} = ach\bar{\xi}_0, a_j sh\bar{\xi}_{j0} = \delta_j ash\bar{\xi}_0, \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta};$$

$$F_{x/\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \bar{\xi}_j} / \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}, \quad F_{y/\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \bar{\theta}_j} / \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0};$$

$$F_{x/\bar{\xi} = \bar{\xi}_0} = F_{x/\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_{10}}^{(1)} + F_{x/\bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\bar{\xi} = \bar{\xi}_0} = F_{y/\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_{10}}^{(1)} + F_{y/\bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_{20}}^{(2)}; \quad (11)$$

$$h_0 = \sqrt{ch^2 \bar{\xi}_0 - \cos^2 \bar{\theta}}, \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta} \quad \text{при} \quad \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}, \bar{\xi} = \bar{\xi}_0.$$

В предельном случае $\bar{\xi}_0 = 0$ ($\bar{\xi}_{j0} = 0$) эллипсы $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = \pm 0$, причем $a_j = a, h_0 = |\sin \bar{\theta}|$ ($0 \leq \bar{\theta} \leq 2\pi$).

Базисные гармонические функции в координатных системах $\langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle, \langle \bar{\xi}, \bar{\theta} \rangle$ связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} & e^{-(2k+1)\bar{\xi}_j} \cos(2k+1)\bar{\theta}_j = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1, 2k+1}^{(j)} ch(2n+1)\bar{\xi}_j \cos(2n+1)\bar{\theta}_j + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n, 2k+1}^{(j)} sh2n\bar{\xi}_j \sin 2n\bar{\theta}_j, \\ & e^{-2k\bar{\xi}_j} \sin 2k\bar{\theta}_j = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1, 2k}^{(j)} ch(2n+1)\bar{\xi}_j \cos(2n+1)\bar{\theta}_j + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n, 2k}^{(j)} sh2n\bar{\xi}_j \sin 2n\bar{\theta}_j; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & e^{-(2k+1)\bar{\xi}_j} \sin(2k+1)\bar{\theta}_j = -\frac{1}{2}b_{0,2k+1}^{(j)} - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n,2k+1}^{(j)} ch2n\xi_j \cos 2n\theta_j + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1,2k+1}^{(j)} sh(2n+1)\xi_j \sin(2n+1)\theta_j, \\
 & e^{-2k\bar{\xi}_j} \cos 2k\bar{\theta}_j = \frac{1}{2}b_{0,2k}^{(j)} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n,2k}^{(j)} ch2n\xi_j \cos 2n\theta_j - \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1,2k}^{(j)} sh(2n+1)\xi_j \sin(2n+1)\theta_j,
 \end{aligned} \right\} (13)$$

В КОТОРЫХ

$$\begin{aligned}
 b_{2n+1,2k+1}^{(j)} &= (4k+2)(-1)^{n+k} \bar{s}_{2n+1,2k+1}^{(j)}, \quad b_{2n,2k}^{(j)} = 4k(-1)^{n+k} \bar{s}_{2n,2k}^{(j)}, \\
 b_{2n+1,2k}^{(j)} &= 4k(-1)^{n+k} \bar{s}_{2n+1,2k}^{(j)}, \quad b_{2n,2k+1}^{(j)} = (4k+2)(-1)^{n+k} \bar{s}_{2n,2k+1}^{(j)}, \\
 \bar{s}_{m,l}^{(j)} &= \int_0^{\infty} \mu^{-1} e^{-2\delta_j h \mu} J_m(a_j \mu) J_l(a_j \mu) d\mu,
 \end{aligned}$$

$J_n(z)$ – функция Бесселя первого рода, $n = 0, 1, 2, \dots$

Метод получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложен в работе [5].

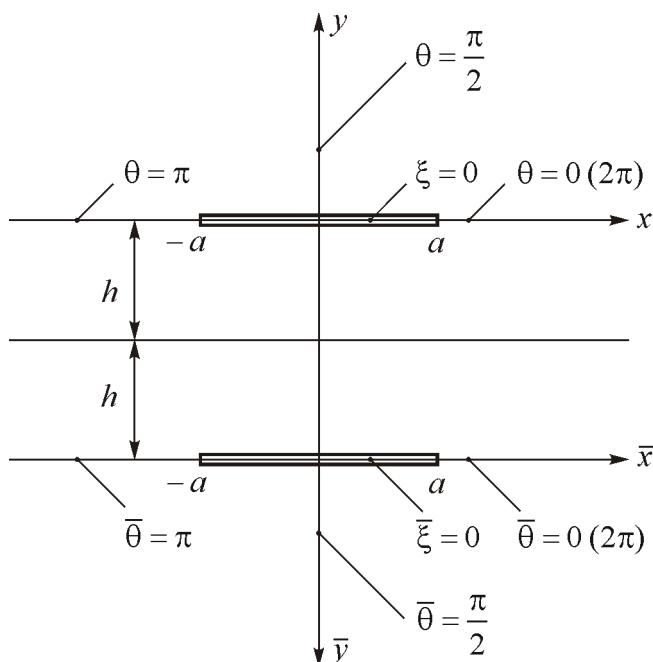
Разложения (12), (13) в сочетании с методом Фурье и представлениями (1) – (3), (8), (11) позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическими отверстиями $0 \leq \xi < \xi_0$, $0 \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}_0$, в частности параллельными разрезами $\xi = 0$, $\bar{\xi} = 0$.

2. Симметричный вариант равновесия пластины

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для неограниченной ортотропной пластины (рисунок) с двумя параллельными разрезами $\xi = 0$ ($|x| < a$, $y = \pm 0$) и $\bar{\xi} = 0$ ($|\bar{x}| < a$, $\bar{y} = \pm 0$). Пусть берега разрезов растягиваются равномерно распределенными и противоположно направленными нормальными усилиями интенсивности $\sigma_0 = const$ ($\sigma_0 > 0$). В силу симметрии задачи относительно оси y (\bar{y}) и прямой $y = -h$ ($\bar{y} = -\bar{h}$) достаточно ограничиться краевыми условиями

$$F_{x/y=\pm 0} = 0 (|x| < a), \quad F_{y/y=\pm 0} = \pm \sigma_0 (|x| < a), \quad (14)$$

а гармонические функции I_j ($j=1,2$) выбрать в виде суммы рядов по базисным гармоническим функциям в областях $0 < \xi_j < \infty$, $0 < \bar{\xi}_j < \infty$:



Геометрия пластины

$$I_j = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)} \left[e^{-(2n+1)\xi_j} \cos(2n+1)\theta_j + e^{-(2n+1)\bar{\xi}_j} \cos(2n+1)\bar{\theta}_j \right] + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)} \left[e^{-2n\xi_j} \sin 2n\theta_j + e^{-2n\bar{\xi}_j} \sin 2n\bar{\theta}_j \right] \quad (j=1,2). \quad (15)$$

Используя теперь равенства (8), (11), разложения (12), (15) и учитывая, что $\xi_0 = 0, \xi_{j0} = 0, \bar{\xi}_0 = 0, \bar{\xi}_{j0} = 0, a_j = a, h_0 = |\sin \theta|, \bar{h}_0 = |\sin \bar{\theta}|$, после удовлетворения краевым условиям (14) получаем следующие связи между искомыми коэффициентами $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$:

$$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \frac{1}{\delta_1} B_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} B_n^{(2)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\frac{1}{\delta_1} A_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} A_n^{(2)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\delta_1} A_k^{(1)} b_{2n+1, 2k+1}^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} A_k^{(2)} b_{2n+1, 2k+1}^{(2)} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\delta_1} B_k^{(1)} b_{2n+1, 2k}^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} B_k^{(2)} b_{2n+1, 2k}^{(2)} \right] - \bar{f}_n;$$

$$B_n^{(1)} + B_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k^{(1)} b_{2n,2k}^{(1)} + B_k^{(2)} b_{2n,2k}^{(2)} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k^{(1)} b_{2n,2k+1}^{(1)} + A_k^{(2)} b_{2n,2k+1}^{(2)} \right];$$

$$\bar{f}_0 = \sigma_0, \bar{f}_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Полагая $A_n^{(1)} = \frac{\delta_1 \delta_2 \sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} x_n; B_n^{(1)} = \frac{\delta_1 \sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} y_n$, для нахождения x_n, y_n получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(11)} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}^{(12)} y_k + f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(21)} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}^{(22)} y_k \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \tag{16}$$

в которой

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ d_{nk}^{(11)} &= (-1)^{n+k} \frac{4k+2}{\delta_1 - \delta_2} \left[\delta_2 s_{2n+1,2k+1}^{(1)} - \delta_1 s_{2n+1,2k+1}^{(2)} \right], \\ d_{nk}^{(12)} &= (-1)^{n+k} \frac{4k}{\delta_1 - \delta_2} \left[s_{2n+1,2k}^{(1)} - s_{2n+1,2k}^{(2)} \right], \\ d_{nk}^{(21)} &= (-1)^{n+k} \frac{4k+2}{\delta_1 - \delta_2} \delta_1 \delta_2 \left[s_{2n,2k+1}^{(1)} - s_{2n,2k+1}^{(2)} \right], \\ d_{nk}^{(22)} &= (-1)^{n+k} \frac{4k}{\delta_1 - \delta_2} \left[\delta_1 s_{2n,2k}^{(1)} - \delta_2 s_{2n,2k}^{(2)} \right], \\ s_{m,l}^{(j)} &= \int_0^{\infty} \mu^{-1} e^{-2\delta_j h \mu} J_m(a\mu) J_l(b\mu) d\mu \quad (m, l = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2). \end{aligned}$$

Значения интегралов [6]

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\varphi(x)]^{-m-l} e^{i(m-l)x} J_{m+l}[c\varphi(x)] \cos^{m+l} x dx = \frac{\pi J_m(ac) J_l(bc)}{(2a)^m (2b)^l},$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2(a^2 e^{ix} + b^2 e^{-ix}) \cos x}, \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-px} J_\nu(qx) dx = \frac{q^\nu}{\nu} \left(p + \sqrt{p^2 + q^2} \right)^{-\nu}$$

позволяют величины $s_{m,l}^{(j)}$ представить в форме, более удобной для исследования свойств бесконечной системы (16). Полагая $b = a, c = \mu, \nu = m + l, p = 2\delta_j h, q = \varphi(x)$, имеем последовательно

$$\varphi(x) = 2a \cos x,$$

$$J_m(a\mu)J_l(a\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{m+l}(2a\mu \cos x) \cos(m-l)x dx,$$

$$\int_0^\infty \mu^{-1} e^{-2\delta_j h \mu} J_{m+l}(2a\mu \cos x) d\mu = \frac{1}{m+l} \left(\frac{a \cos x}{\delta_j h + \sqrt{\delta_j^2 h^2 + a^2 \cos^2 x}} \right)^{m+l},$$

$$s_{m,l}^{(j)} = \frac{2}{\pi(m+l)} \int_0^{\pi/2} f_{m+l}^{(j)}(x) \cos(m-l)x dx, \quad f_{m+l}^{(j)}(x) = \left(\frac{a \cos x}{\delta_j h + \sqrt{\delta_j^2 h^2 + a^2 \cos^2 x}} \right)^{m+l},$$

$$f_{m+l}^{(j)}(x) \geq 0, \frac{d}{dx} f_{m+l}^{(j)}(x) \leq 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}), \quad f_{m+l}^{(j)}(x) \leq f_{m+l}^{(j)}(0),$$

$$\left| s_{m,l}^{(j)} \right| \leq \frac{2}{\pi(m+l)} \int_0^{\pi/2} f_{m+l}^{(j)}(x) dx \leq \frac{1}{m+l} f_{m+l}^{(j)}(0), \text{ т.е.}$$

$$\left| s_{m,l}^{(j)}(\varepsilon_j) \right| \leq \frac{\varepsilon_j^{m+l}}{m+l}, \quad \varepsilon_j = \frac{a}{\delta_j h + \sqrt{\delta_j^2 h^2 + a^2}} \quad (0 < \varepsilon_j < 1). \quad (17)$$

Тогда $\sigma_n^{(i1)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{k=0}^\infty \left| d_{nk}^{(i1)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right| \rightarrow 0, \sigma_n^{(i2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{k=1}^\infty \left| d_{nk}^{(i2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right| \rightarrow 0,$

если $n \rightarrow \infty, 0 < \varepsilon_j < 1$, т.е. бесконечная система (16) квазирегулярна при любых допустимых значениях исходных параметров a, h, δ_j .

Поскольку $\sigma_n^{(ij)}(0,0) = 0 (n = 0,1,2,\dots; j = 1,2)$, то существуют значения $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*$, такие, что при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^*, 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_2^* (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^* < 1)$ бесконечная система (16) вполне регулярна.

На основании представлений (1), (3), (15) и равенств $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ (при $\theta = 0, \theta = \pi$), $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}$ (при $\bar{\theta} = 0, \bar{\theta} = \pi$) для нормальных напряжений $\sigma_{x/\theta=0}, \sigma_{y/\theta=0}, \sigma_{x/\theta=\pi}, \sigma_{y/\theta=\pi}, \sigma_{x/\bar{\theta}=0}, \sigma_{y/\bar{\theta}=0}, \sigma_{x/\bar{\theta}=\pi}, \sigma_{y/\bar{\theta}=\pi}$ получаем асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} &\sim \frac{\sigma_0}{sh\xi} \begin{Bmatrix} \delta_1 \delta_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x_n e^{-(2n+1)\xi} \quad (\theta = 0, \pi; \xi \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm a)), \\ \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} &\sim \frac{\sigma_0}{sh\bar{\xi}} \begin{Bmatrix} \delta_1 \delta_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x_n e^{-(2n+1)\bar{\xi}} \quad (\bar{\theta} = 0, \pi; \bar{\xi} \rightarrow 0 (\bar{x} \rightarrow \pm a)). \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи коэффициент интенсивности нормальных напряжений один и тот же для всех вершин разрезов:

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a} \left[\sigma_y \sqrt{2(x-a)} \right]_{|\theta=0} = \sigma_0 \sqrt{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x_n. \quad (18)$$

Оценки (17) обеспечивают сходимость ряда в формуле (18).

Разлагая величины $s_{m,l}^{(j)}(\varepsilon_j)$ по степеням параметра ε_j , имеем:

$$\begin{aligned} s_{1,1}^{(j)} &= \frac{1}{4}\varepsilon_j^2 + \frac{1}{8}\varepsilon_j^4 + \frac{1}{32}\varepsilon_j^6 + O(\varepsilon_j^8), & s_{1,2}^{(j)} = s_{2,1}^{(j)} &= \frac{1}{8}\varepsilon_j^3 + \frac{1}{16}\varepsilon_j^5 + O(\varepsilon_j^7), \\ s_{2,2}^{(j)} &= \frac{3}{32}\varepsilon_j^4 + \frac{1}{16}\varepsilon_j^6 + O(\varepsilon_j^8), & s_{1,3}^{(j)} = s_{3,1}^{(j)} &= \frac{1}{16}\varepsilon_j^4 + \frac{1}{64}\varepsilon_j^6 + O(\varepsilon_j^8), \\ s_{1,4}^{(j)} = s_{4,1}^{(j)} &= \frac{1}{32}\varepsilon_j^5 + O(\varepsilon_j^7), & s_{1,5}^{(j)} = s_{5,1}^{(j)} &= \frac{1}{64}\varepsilon_j^6 + O(\varepsilon_j^8), \dots \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (16) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами порядка $O(\varepsilon_1^m \varepsilon_2^l)$ ($2 \leq m+l \leq 4$), получаем

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 + \frac{\delta_2 \varepsilon_1^2 - \delta_1 \varepsilon_2^2}{2(\delta_1 - \delta_2)} + \frac{\delta_1 \delta_2}{4(\delta_1 - \delta_2)^2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2, & x_1 &= \frac{\delta_1 \varepsilon_2^4 - \delta_2 \varepsilon_1^4}{8(\delta_1 - \delta_2)}; \\ y_1 &= \frac{\delta_1 \delta_2}{4(\delta_1 - \delta_2)} (\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3); & \frac{1}{2} &< x_0 < 1, x_1 > 0, y_1 > 0; \end{aligned}$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} \left[1 + \frac{\delta_2 \varepsilon_1^2 - \delta_1 \varepsilon_2^2}{2(\delta_1 - \delta_2)} + \frac{\delta_1 \delta_2}{4(\delta_1 - \delta_2)^2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2 + \frac{3(\delta_1 \varepsilon_2^4 - \delta_2 \varepsilon_1^4)}{8(\delta_1 - \delta_2)} \right].$$

Нетрудно убедиться, что $\frac{1}{2}\sigma_0\sqrt{a} < K_I < \sigma_0\sqrt{a}$. В случае одного разреза в пластине $K_I = \sigma_0\sqrt{a}$. Следовательно, при данном способе нагружения разрезов их взаимное влияние характеризуется уменьшением коэффициента интенсивности нормальных напряжений в сравнении с коэффициентом K_I для одного разреза.

При решении бесконечной системы уравнений (16) методом редукции вычисление ее матричных коэффициентов можно осуществить с помощью формулы

$$s_{m,l}^{(j)} = \frac{1}{m+l} \left[B_{m-1,l}^{(j)} + B_{m,l-1}^{(j)} - \frac{\rho_j}{a} B_{m,l}^{(j)} \right] \quad (m, l = 1, 2, \dots), \quad (19)$$

в которой величины $B_{n,k}^{(j)} = B_{k,n}^{(j)}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$B_{m+1,l}^{(j)} = \begin{cases} -B_{m-1,l}^{(j)} + \frac{2m}{m-l} \left[B_{m-1,l}^{(j)} - B_{m,l+1}^{(j)} - \frac{\rho_j}{a} B_{m,l}^{(j)} \right] & (l \neq m), \\ B_{m,m-1}^{(j)} - \frac{\rho_j}{a} B_{m,m}^{(j)} & (l = m); \end{cases} \quad (20)$$

$$B_{1,0}^{(j)} = \frac{1}{2} - \frac{\rho_j k_j}{2\pi a} K(k_j), \quad B_{1,1}^{(j)} = \frac{1}{\pi k_j} \left[(2 - k_j^2) K(k_j) - 2E(k_j) \right],$$

$$B_{2,0}^{(j)} = \frac{4}{\pi k_j} E(k_j) - \frac{k_j}{\pi} K(k_j) - \frac{\rho_j}{a},$$

$$B_{2,1}^{(j)} = \frac{2}{\pi a k_j} E(k_j) - \frac{\rho_j k_j (\rho_j^2 + 3a^2)}{2\pi a^3} K(k_j) + \frac{1}{2},$$

$$B_{3,1}^{(j)} = \frac{2}{3\pi k_j^3} \left[(32 - 38k_j^2 + 3k_j^4) K(k_j) - 2(16 - 23k_j^2) E(k_j) \right] - \frac{2\rho_j}{a},$$

$$B_{2,2}^{(j)} = \frac{1}{3\pi k_j^3} \left[(4 - k_j^2)(4 - 3k_j^2) K(k_j) - 8(2 - k_j^2) E(k_j) \right];$$

$\rho_j = 2\delta_j h$, $k_j = \frac{a}{\sqrt{\delta_j^2 h^2 + a^2}} < 1$; $E(k)$, $K(k)$ – полные эллиптические

интегралы,

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right] \quad (0 < k < 1),$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (0 < k < 1) -$$

их разложения в степенные ряды [7].

Формулы (19), (20) получены путем интегрирования по частям в интегралах

$$S_{m,l}^{(j)} = S_{l,m}^{(j)} = \int_0^{\infty} \mu^{-1} e^{-2\delta_j h \mu} J_m(a\mu) J_l(a\mu) d\mu,$$

$$B_{m,l}^{(j)} = B_{l,m}^{(j)} = a \int_0^{\infty} e^{-2\delta_j h \mu} J_m(a\mu) J_l(a\mu) d\mu$$

и применения соотношений между цилиндрическими функциями разных порядков [6]

$$2\nu J_\nu(z) = zJ_{\nu+1}(z) + zJ_{\nu-1}(z), \quad z \frac{d}{dz} J_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z).$$

В заключение отметим, что разложения (13) позволяют реализовать антисимметричный вариант задачи, а в общем случае разбиение краевой задачи на симметричную и антисимметричную дает возможность исследовать ее с помощью разложений (12), (13) при произвольных граничных условиях на берегах разрезов.

Список литературы

1. Космодамианский, А.С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах [Текст] / А.С. Космодамианский // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 21 – 48.
2. Немиш, Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) [Текст] / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 2. – С. 3 – 38.
3. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С. 117-127.
4. Соловьев, А.И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А.И. Соловьев, А.В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101-110.
5. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 973 – 982.
6. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
7. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Рецензент: д.т.н., профессор М.Л. Угрюмов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 11.02.14

Рівновага ортотропної пластини, яка ослаблена двома паралельними розрізами

Запропоновано аналітичний метод розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкої ортотропної пластини з двома розрізами на паралельних осях анізотропії. За допомогою співвідношень між базисними розв'язками рівняння Лапласа у різних еліптичних системах координат отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь другого роду з матричними коефіцієнтами, які зменшуються експоненціально. Це дозволило провести ефективний аналіз напружено-деформованого стану в околі концентраторів напружень, зокрема отримати прості асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: ортотропна пластинка, розріз, система координат, гармонічна функція, коефіцієнт.

Equilibrium of orthotropic plate weakened by two finite parallel sections

Analytical method of solving the boundary-value problems of theory of elasticity for thin orthotropic plate with two finite sections on the parallel axes of anisotropy is suggested. It is based on applying the ratio between Laplace equation basic solutions in different elliptic coordinate systems and leads to infinite systems of linear algebraic equations of the second kind with exponentially decreasing matrix coefficients. That allows to carry out an effective analysis of deflected mode near to stress concentrators and derive simple asymptotic formulae for stress intensity factors in particular.

Keywords: orthotropic plate, section, coordinate system, harmonic function, coefficient.