УДК 621.9.048:004.942:629.7 Ю. В. Дьяченко, А. В. Маковецкий, Е. Е. Хитрых

# Численное моделирование процессов лазерной резки листовых авиационных материалов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрена методика исследования процессов лазерной резки листовых материалов для изделий аэрокосмической техники с использованием прогрессивных методов численного моделирования, в частности метода конечных элементов. Проведен численный температурный анализ процесса лазерной резки авиационных материалов (сталей BHC-5, 45, X18H10T и титанового сплава BT-5) и сформулированы рекомендации по выбору технологических параметров процесса лазерной резки для рассматриваемых марок материалов. *Ключевые слова:* технологический процесс, размерная обработка, лазер, лазерная резка, нагрев, мощность, температурное поле, изотерма, глубина реза, метод конечных элементов.

#### Введение

Лазерная техника переживает период интенсивного развития. Широкое применение получили лазеры для обработки материалов, в том числе заготовок изделий аэрокосмической техники, что позволило повысить производительность труда в операциях обработки и контроля, улучшить качество изготовления, увеличить ресурс, обеспечить возможность полной автоматизации технологических процессов.

Лазерное излучение обладает уникальными физическими особенностями, высокой степенью монохроматичности, когерентности, что дает возможность фокусировать луч лазера в пятно диаметром в несколько длин волн.

Применение лазерной технологии на производстве позволяет существенно уменьшить количество технологических этапов изготовления изделия, снизить процент брака, поднять производительность процесса.

Области использования лазеров в различных сферах человеческой деятельности ежегодно расширяются, быстро увеличивается число разрабатываемых и производимых типов лазеров различного назначения с длинами волн генерации от ультрафиолетового и рентген-диапазона (менее 300 нм) до инфракрасного диапазона (10600 нм), с разным уровнем мощности и разным временным режимом.

Доля листовых деталей в современном машиностроении составляет около 70% [1, 2]. Их получают с применением разделительных операций. В условиях массового и серийного производства такие операции наиболее эффективно выполнять штамповкой. Однако наряду с широкими технологическими возможностями листовая штамповка имеет ряд недостатков (сложность и высокая стоимость изготовления, эксплуатации и ремонта штампов; технологические ограничения по сложности обрабатываемого контура; зависимость качества реза от толщины материала, затупления режущих кромок, нарушения зазоров и др.). В условиях единичного производства для разделительных операций листового металла применяют механическую обработку, но она низкопроизводительна, инструмент имеет высокую стоимость, затруднена обработка материала с повышенными механическими свойствами.

В условиях серийного производства все более широкое применение получают процессы физико-технической обработки, прежде всего методы плазменной и лазерной резки, которые интенсивно развиваются и успешно конкурируют со штамповкой и обработкой резанием.

Лазерная резка эффективна при вырезании сложных контуров из тонколистового проката. Учитывая высокую стоимость лазерного оборудования, его выгодно применять в тех случаях, когда сложно или невозможно применять обычные разделительные технологии. Лазер в таких случаях выступает в роли уникального инструмента – такой инструмент не оказывает механического воздействия на материал, поэтому с его помощью можно обрабатывать заготовки без обязательного надежного крепления их на рабочем столе. Большая скорость резки дает возможность значительно повысить производительность раскройных операций.

Высокие температуры, развиваемые в зоне лазерного воздействия, позволяют реализовать управляемое локальное разрушение и на основе этого создать высокоэффективные технологические процессы лазерной резки. Резка может быть выполнена как импульсным, так и непрерывным лазерным излучением.

Современные методы математического моделирования, в том числе прогрессивный метод конечных элементов (МКЭ), позволяют проводить анализ процессов размерной обработки материалов, получать результаты, близкие к данным натурных экспериментов, анализировать распределение тепловых полей от точечных и распределенных источников, определять основные энергосиловые параметры исследуемых процессов и таким образом сократить общие финансовые затраты на проведение исследований.

**Цель работы** – разработка численных моделей процессов лазерной резки листовых авиационных материалов типовой номенклатуры, позволяющих анализировать распределение тепловых полей от точечного источника тепла в виде лазерного луча, перемещающегося с различной скоростью относительно разрезаемой заготовки.

#### Механизм лазерной резки

Основные количественные соотношения для лазерной резки можно получить из анализа следующей тепловой модели процесса. Тепловой источник мощностью *q*, равной поглощенной материалом доле лазерного излучения *P*, движется прямолинейно по поверхности бесконечной пластины толщиной *s* со скоростью *v* [3].

Стационарное тепловое поле в подвижной системе координат может быть представлено семейством изотерм, сгущенных впереди и разреженных позади движущегося источника. На рис. 1 показаны расчетные изотермы для теплового источника мощностью 500 Вт, движущегося со скоростью 20 мм/с по пластине из стали 3 толщиной 1 мм [3].

Основные закономерности процесса могут быть получены при использовании модели сосредоточенного теплового источника. При этом предполагается, что вся энергия источника сосредоточена в точке на поверхности материала, но температура соответствующих точек обеих поверхностей образца одинакова (рассматривается двумерная задача теплопроводности).

Механизм лазерной резки материалов достаточно сложен. В соответствии с существующей теорией [4] после воспламенения металла через некоторый промежуток времени устанавливается квазистационарный режим разрушения, при котором его скорость  $v_p$  определяется только температурой границы разрушения  $T_p$  в зоне обработки.



Рис. 1. Температурное поле движущегося точечного теплового источника ( $q_{\pi}$  = 500 Вт, v = 20 мм/с, s = 1 мм): 1 – T = 1300°С; 2 – T = 900°С; 3 – T = 700°С

Однако на механизм формирования реза существенно влияют и те явления, которые происходят на верхней кромке металла до момента установления квазистационарного разрушения. В этот переходный период происходит нагревание верхней кромки металла от исходной температуры до  $T_p$  и ускорение границы разрушения до скорости  $v_p$ . При этом переходный процесс сопровождается перераспределением поглощенной и перешедшей в тепло энергии лазерного излучения.

В начальный момент граница разрушения неподвижна, все тепло отводится внутрь металла механизмом теплопроводности, а также расходуется (при достижении на верхней кромке детали температуры плавления металла  $T_{nn}$ ) на образование прослойки жидкого металла, его окислов и нагрев этой прослойки до температуры  $T_p$ . Толщина нагретого слоя вблизи неподвижного фронта разрушения возрастает с течением времени *t* пропорционально  $\sqrt{t}$  [5].

Скорость границы разрушения в переходный период остается незначительной по сравнению с квазистационарной. При достижении же температуры  $T_p$  скорость границы разрушения резко возрастает до значения  $v_p$  [5].

Следовательно, будем считать, что изменение скорости границы разрушения носит ступенчатый характер: после некоторого запаздывания она достигает стационарной скорости движения  $v_p$ , определяемой только температурой поверхности металла  $T_p$ .

Время  $t_0$  установления квазистационарного разрушения для малых скоростей обработки можно определить, учитывая, что нагревание металла происходит движущимся с постоянной скоростью v лазерным лучом, сфокусированным в круговое пятно радиуса  $r_n$ :

$$t_{0} = \frac{2a}{v^{2}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{kv(T_{\kappa un} - T_{\mu})}{W_{p}a}} \right],$$
(1)

где  $T_{H}$  – начальная температура металла, °C;

 $T_{\kappa u \pi}$  – температура кипения металла, °C;

 $W_p$  – плотность лазерной мощности, Вт/см<sup>2</sup>;

Р-мощность лазерного излучения, Вт.

В течение времени *t*<sub>0</sub> лазерный источник переместится по верхней кромке металла на расстояние

$$x_{0} = \frac{2a}{v} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{kv(T_{\kappa un} - T_{\mu})}{W_{p}a}} \right].$$
(2)

Следовательно, если за время  $t_0$  зона жидкого металла распространится в направлении резки на большее расстояние, чем переместится лазерный луч (что характерно для низких скоростей резки), т. е.  $x_s > x_0$ , то в течение этого времени перед движущимся лазерным лучом на верхней кромке образуется расплавленный участок.

При дальнейшем движении лазерного пучка обработка на этом участке происходит только вглубь металла до тех пор, пока луч лазера вновь не достигнет верхней кромки металла. Затем снова в течение времени  $t_0$  верхняя кромка металла нагревается до температуры  $T_0$  передней частью движущегося лазерного луча при неподвижной границе разрушения, тогда как благодаря оставшейся части лазерного луча продолжается резание вглубь металла. Процесс периодически повторяется.

В данном случае время достижения квазистационарного разрушения

$$t_0 = \frac{\pi \cdot k^2}{4 \cdot a} \left[ \frac{T_{\kappa un} - T_{\mu}}{W_p} \right]^2.$$
(3)

Диапазон скоростей обработки, для которых характерно образование бороздчатого рельефа поверхности реза, можно определить из условия *x*<sub>s</sub> > *x*<sub>0</sub>.

Тогда

$$v_{\sigma} < \frac{a}{k} W_{P} \left[ \frac{T_{\kappa un} - T_{nn}}{\left(T_{\kappa un} - T_{H}\right)^{2}} \right].$$
(4)

Максимальную толщину разрезаемого металла *s* для низких и высоких скоростей резки можно определить соответственно по зависимостям [3]

$$s = \frac{x_{s} V_{p}^{\Pi} + (2r_{\pi} - x_{0}) V_{p}^{H}}{v};$$
(5)

$$s = \frac{(2r_{n} - x_{0})V_{p}^{H}}{v}.$$
 (6)

Учитывая, что рез в поперечном сечении на верхней кромке детали формируется при неподвижной границе разрушения, его ширину можно оценить из выражения

$$b^{s}{}_{p} = 2 \left[ r_{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x_{0}}{2r_{\pi}}\right)^{2}} + x_{s} \right].$$
<sup>(7)</sup>

При высоких скоростях обработки, когда теплоотводом в поперечном направлении можно пренебречь, ширина реза на верхней кромке

$$b^{e}{}_{p} = 2 \left[ r_{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x_{0}}{2r_{\pi}}\right)^{2}} \right],$$
 (8)

где 
$$x_0 = \frac{\pi \cdot k}{4a} \cdot v \cdot \left[\frac{T_{\kappa un} - T_{\mu}}{W_p}\right]^2.$$
 (9)

В глубинных слоях металла рез формируется при движущейся со скоростью  $v_p^{n}$  границе разрушения. Следовательно, его ширина в нижних слоях реза должна быть меньше, чем на верхней кромке. Эту величину можно уточнить из зависимости

$$b_p^{H} = 2 \left[ r_n + \frac{a}{v_p^{H}} \ln \frac{T_{\kappa u n}}{T_{n n}} \right].$$
(10)

Приведенные зависимости справедливы для широкого диапазона применяемых материалов, мощностей лазерного излучения, скоростей обработки [5]. Данная теоретическая модель может быть рекомендована для предварительных и оценочных расчетов режимов лазерной резки металлов непрерывным лазерным излучением.

#### Разработка численных моделей процессов лазерной резки металлических листовых материалов

Моделирование процесса лазерной резки проводили в системе инженерного конечно-элементного анализа ANSYS. Был исследован процесс движения лазерного луча по поверхности материала и образование благодаря этому движению сквозного реза с отображением распределения возникающего температурного поля.

Использованные при разработке моделей характеристики материалов приведены в таблице [5].

Марка материала	Теплопроводность <i>k,</i> Вт/мм⋅град	Удельная теплоемкость <i>с,</i> Дж/г·град	Плотность $ ho$ , г/см $^3$
Титановый сплав BT-5	0,023	0,52	4,5
Сталь ВНС-5	0,02	0,5	7,56
Сталь 45	0,0519	0,477	7,845
Сталь Х18Н10Т	0,0155	0,48	7,9

Характеристики разрезаемых листов

В качестве варьируемых параметров, наиболее влияющих на процесс резки, выбраны скорость и толщина материалов; мощность лазерного луча принята во всех расчетных случаях постоянной и равной 1000 Вт. Скорости выбраны в диапазоне: 5 мм/с, от 10 до 50 мм/с с шагом 10 мм/с, толщины листа – от 1 до 4 мм с шагом 1 мм.

Для численного решения задачи резки листового металла лазерным лучом был применен тип анализа *Transient Thermal Analysis*, позволяющий учесть характер изменения исследуемых температурных характеристик с течением времени.

Моделирование процесса представлено следующим образом. Пластина с заданными габаритными размерами H×B×L разбивается на конечные элементы SOLID70, представленные в библиотеке элементов ANSYS с различной плотностью разбиения. Задаются исходные данные материала пластины – коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность. Конвективный теплообмен пластины с окружающей средой не учитывается ввиду скоротечности процесса лазерной резки и исследования характеристик реза в начальные моменты времени.

Луч лазера представлен в виде точечного источника тепла заданной мощности (1000 Вт), прикладываемого поочередно к узлам элементов пластины, лежащим на траектории линии реза. Время перехода от одного узла задавалось таким образом, чтобы скорость перехода от одного узла к другому соответствовала рассматриваемой скорости резки.

Упрощенно резка пластины считалась удовлетворительной при достижении в элементах пластины на обратной от падения луча стороне температуры кипения материала. При решении задачи происходил пошаговый расчет движения луча по поверхности пластины. Всего было просчитано девять шагов в каждом варианте. Этого достаточно для получения наглядного представления о процессе резки, далее процесс повторяется по той же схеме. По итогам расчетов были получены динамические анимационные модели процессов в виде видеороликов, позволяющие получить наглядное представление о прохождении процесса. Для каждого расчетного случая процесс считался завершенным при полном разрезании материала с максимально возможной для данной толщины скоростью.

#### Анализ полученных результатов

В качестве типового примера приведен анализ результатов для титанового сплава ВТ-5. На рис. 2 показано распределение температурного поля в начальный момент времени для пластины толщиной 4 мм, разрезаемой со скоростью движения лазерного луча 5 мм/с. В начальный момент времени, когда луч находится еще у кромки пластины, начинается процесс интенсивного нагрева и окисления материала.



Рис. 2. Температурное поле в начальный момент времени

Начало сквозного реза наступает через 0,4 с (или на четвертом шаге от начала движения луча по поверхности пластины – рис. 3, а). На последнем, девятом, шаге через 0,9 с картина распределения температур имеет иной вид (рис. 3, б).



скорости резки 5 мм/с: а – через 0,4 с; б – через 0,9 с

Пространственное распределение температурного поля (толщина пластины 4 мм, скорость движения луча 5 мм/с) показано на рис. 4.

Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии № 63, 2014



Рис. 4. Температурное поле разрезаемой пластины: а – в начальный момент времени; б – через 0,4 с; в – через 0,9 с

Как видно из рис. 4, ширина реза на верхней плоскости не меняется от начала сквозного разрезания пластины до последнего расчетного шага (на рис. 4, б, в – это зона серого цвета). Очевидно, что такое распределение температурного поля будет сохраняться до конца резки пластины.

На рис. 5 показаны результаты на последнем, девятом, расчетном шаге, который по времени соответствует моменту времени 0,9 с от начала процесса реза.

Сквозная лазерная резка для титанового сплава ВТ-5 толщиной 4 мм начинается при скорости движения луча 5 мм/с. При скорости 10 мм/с рез наблюдается примерно до середины толщины листа (рис. 5, а), а при скорости 50 мм/с – рез незначителен, такой может применяться для неполного прорезания, например гравирования (рис. 5, б).



Рис. 5. Резка листа толщиной 4 мм из титанового сплава ВТ-5 со скоростью: а – 10 мм/с; б – 50 мм/с

В углеродистых сталях, в данном случае для стали 45, в отличие от титановых сталей с повышением температуры значение коэффициента теплопроводности *k* уменьшается [5]. Это приводит к тому, что способность материала пропускать тепло снижается, поэтому при резке такого материала наблюдался сквозной рез лишь у пластин толщиной 1 и 2 мм при максимальных для них скоростях 50 и 10 мм/с соответственно.

Сквозного реза для толщин 3 и 4 мм не происходит в диапазоне выбранных для расчета скоростей. Так же, как и при резке титанового сплава, в начальный момент времени, когда лазерный луч находится у кромки материала, происходит процесс интенсивного нагрева и окисления. Картина распределения температур по толщине материала в начальный момент времени для листа толщиной 2 мм при скорости резки 10 мм/с показана на рис. 6.

Как видно из рис. 6, температурное поле в начальный момент времени в стали 45 распространяется на меньшую глубину по сравнению с титановым сплавом ВТ-5 (см. рис. 5, а). На рис. 7 показано распределение температуры по толщине пластины для начала полного прорезания, на четвертом шаге (0,2 с) от начала движения луча и на девятом шаге (0,45 с) соответственно.



Рис. 6. Температурное поле в начальный момент времени для листа толщиной 2 мм при скорости резки 10 мм/с



а – через 0,2 с; б – через 0,45 с

Из рассматриваемого диапазона скоростей резка листа из стали 45 толщиной 2 мм возможна лишь при скорости не более 10 мм/с. При скоростях выше этого значения сквозного реза не происходит. При скорости 20 мм/с рез наблюдается примерно до середины толщины металла, а при скорости 50 мм/с толщина реза незначительна.

На рис. 8 показано полученное температурное поле на последнем, девятом, шаге расчета (0,45 с).



Рис. 8. Результаты моделирования процесса лазерной резки листа из стали 45 толщиной 2 мм при резке с различными скоростями: а – 20 мм/с; б – 50 мм/с

В нержавеющих сталях, в данном случае для стали X18H10T, резка осуществима для трех рассматриваемых толщин – 1, 2 и 3 мм. Это объясняется тем, что у стали X18H10T коэффициент теплопроводности *k* значительно ниже, чем у стали 45. В результате процесса моделирования нашло свое подтверждение предположение о том, что ширина реза на поверхности входа луча больше ширины реза на выходе. Это наглядно показано на рис. 9 для стали X18H10T (область, выделенная серым цветом).



Рис. 9. Ширина реза на верхней (а) и нижней (б) плоскостях пластины при резке стали X18H10T (толщина 2 мм, скорость 10 мм/с)

Сквозное разрезание листа толщиной 1 мм происходит на всех режимах выбранных для расчетов скоростей, листа толщиной 2 мм – на скоростях до 30 мм/с, листа толщиной 3 мм – на скоростях 5 и 10 мм/с.



Рис. 9. Ширина реза на верхней (а) и нижней (б) плоскостях пластины при резке стали X18H10T (толщина 2 мм, скорость 10 мм/с)

На рис. 10 показано распределение температуры для материалов ВТ-5, ВНС-5, стали 45 и X18H10T при лазерной резке пластин толщиной 1 мм со скоростью 20 мм/с.



Рис. 10. Распределение температурного поля при резке пластин толщиной 1 мм со скоростью 20 мм/с: а – ВТ-5, б – ВНС-5, в – сталь 45, г – Х18Н10Т

Как видно из рис. 10, в титановом сплаве температурное поле распространяется быстрее при одной и той же скорости резки, чем в сталях. При резке углеродистых сталей необходимо стремиться к фокусированию излучения в пятна меньшего диаметра (использовать установки с малой расходимостью лазерного пучка, работающие в одномодовом режиме, применять более короткофокусные линзы) с целью повышения плотности мощности в зоне резки, однако не более той величины  $W_p$ , при которой на выбранных скоростях наступает неуправляемое горение стали.

Для нержавеющих сталей глубина реза *s* возрастает с уменьшением диаметра пятна фокусирования с одновременным понижением и его качества. Для титановых сплавов характерны те же закономерности, однако при снижении плотности мощности наблюдается значительно более резкое снижение глубины разрезания металла. В результате одинаковую глубину качественного реза для титановых сплавов можно получить как при высокой плотности мощности и более высокой скорости резки, так и при низких значениях плотности мощности и скорости резки. Следовательно, при резке нержавеющих сталей не всегда следует стремиться к повышению плотности мощности в зоне резки. При резке же титановых сплавов лучшие результаты получаются при повышении плотности мощности в зоне обработки.

Ширина реза снижается с уменьшением диаметра пятна фокусировки на всех рассматриваемых материалах, несмотря на некоторое повышение при этом плотности мощности. Также она зависит и от теплопроводности материала.

Результаты исследований показали, что наряду с плотностью мощности важным технологическим фактором, во многом определяющим размерные параметры обработки, является скорость резки. Однако варьирование скорости обработки имеет ограничения. Нижним пределом допустимой скорости резки для углеродистых сталей служит переход процесса в режим автогенной резки, для нержавеющих сталей, титановых и алюминиевых сплавов – резкое ухудшение качества поверхности реза. В условиях резки металлов лазером мощностью 1000 Вт такие явления особенно характерны при скоростях обработки меньше 0,3... 0,5 м/мин. Слишком же высоким скоростям резки соответствует резкое снижение толщины разрезаемых деталей. Поэтому обычно скорости резки не повышают более 6...8 м/мин [3].

#### Выводы

1. Проведен анализ возможности исследования и разработаны численные (конечно-элементные) модели процесса лазерной резки металлических листовых заготовок для деталей аэрокосмической техники.

2. Анализ результатов моделирования показал, что титановые сплавы обладают лучшей способностью к резке лазерным излучением, несмотря на повышенные в сравнении с конструкционными сталями прочностные характеристики. Высокопрочные стали при прочих равных параметрах (мощность излучения, скорость резки) по сравнению с титановыми сплавами при лазерной резке имеют ограничения по толщинам листа. Эти ограничения связаны с различными механизмами изменения теплопроводности таких материалов при нагревании до температуры кипения.

3. Моделирование температурных полей при лазерной резке различных групп материалов с различными скоростями резки для разных толщин листов показало, что ширина реза на входе и выходе лазерного луча различна и зависит от скорости резки.

4. Анализ результатов моделирования температурных полей при лазерной резке различных групп материалов и разных толщин листов показал, что наиболее эффективным технологическим параметром для управления качеством реза является скорость движения лазерного луча.

#### Список литературы

1. Кривов, Г. А. Технология самолетостроительного производства [Текст] / Г. А. Кривов. – К.: КВІЦ, 1997. – 459 с.

2. Гайдачук, В. Е. Анализ эффективности технологии лазерной резки листовых деталей из цветных металлов в серийном авиационном производстве [Текст] / В. Е. Гайдачук, А. И. Костенко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 61(1). – Х., 2010. – С. 20 – 37.

3. Технологические лазеры: справ., в 2 т. – Т. 1: Расчет, проектирование и эксплуатация [Текст] / Г. А. Абильсиитов, В. С. Голубев, В. Г. Гонтарь; под ред. Г. А. Абильсиитова. – М.: Машиностроение, 1991. – 432 с.

4. Анисимов, С. И. Действие излучения большой мощности на металлы [Текст] / С. И. Анисимов, Я. А. Имас, Г. С. Романов и др. – М.: Наука, 1970. – 192 с.

5. Краткий справочник физико-химических величин [Текст] / под ред. К. П. Мищенко, А. А. Равделя. – М.: Высш. шк., 1969. – 268 с.

> Рецензент: д-р техн. наук, проф. Планковский С. И., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» Поступила в редакцию 21.01.2014

### Числове моделювання процесів лазерного різання листових авіаційних матеріалів

Розглянуто методику дослідження процесів лазерного різання листових матеріалів для виробів аерокосмічної техніки з використанням прогресивних методів числового моделювання, зокрема методу скінченних елементів. Проведено числовий температурний аналіз процесу лазерного різання авіаційних матеріалів (сталей BHC-5, 45, X18H10T і титанового сплаву BT-5) і сформульовано рекомендації щодо вибору технологічних параметрів процесу лазерного різання для марок матеріалів, що розглядаються.

*Ключові слова:* технологічний процес, розмірна обробка, лазер, лазерне різання, нагрівання, потужність, температурне поле, ізотерма, глибина різання, метод скінченних елементів.

## Numerical Modeling of Processes of Laser Cutting of Aircraft Metal Sheets

The article investigates a methodology to research the processes of laser cutting of metal sheets for aircraft structures by use of progressive methods of numerical modeling, in particular finite element method. A numerical temperature analysis of laser cutting of aircraft materials (steels BHC-5, 45, X18H10T, and titanium alloy BT-5) was performed, recommendations for selecting of technological parameters of laser cutting for selected materials were stated.

*Keywords:* manufacturing process, dimensional processing, laser, laser cutting, heating, power, temperature field, isotherm, cutting depth, finite element method.