УДК 535.41 В. К. Волосюк, Е. А. Аксёнов

Синтез оптимального алгоритма оценки относительного сдвига лазерных спекл-изображений шероховатой поверхности

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрен корреляционно-экстремальный метод обработки серии спекл-изображений, полученных при освещении лазерным излучением рабочих органов металлорежущих станков с целью оценки величины смещения исследуемой поверхности. Поставлена и решена задача нахождения оптимального алгоритма оценки величины смещения спекл-изображения. Рассчитаны предельные погрешности определения величины смещения спекл-изображения.

Ключевые слова: спекл-картина, корреляция, оптимизационная задача, предельная погрешность, уравнение наблюдения, шероховатая поверхность.

1. Постановка задачи

Алгоритм синтезирован применительно к решению задачи оценки траектории движения рабочих органов металлорежущих станков для исследования точности позиционирования режущего инструмента относительно обрабатываемой детали. Алгоритм основан на поиске максимума взаимной корреляционной функции спекл-изображений, получаемых от шероховатой поверхности и подвергнутых обработке. Он может быть отнесён к классу алгоритмов корреляционно-экстремальной обработки сигналов, используемых в системах навигации летательных аппаратов [1], однако имеет свою специфику и новизну, связанную как с особенностями самой задачи, так и с её статистической оптимизационной постановкой.

Оценка величины перемещения осуществляется следующим образом.

В рабочий орган станка вместо обрабатывающего инструмента устанавливается измерительный прибор, который содержит источник когерентного излучения, матричный фотоприёмник и устройство обработки. Вместо обрабатываемой детали устанавливается эталон, имеющий плоскую шероховатую статистически неровную поверхность. Луч лазера освещает эту поверхность и, отражаясь, падает на фотоприёмник, формируя на нём пятнистое интерференционное изображение, которое называется спекл-картиной [2, 3].

При перемещении органов станка по заданной траектории происходит смещение поверхности относительно измерительного прибора. Соответственно, смещается и спекл-картина, формируемая этой поверхностью относительно фотоприёмника.

Регистрируя с определённой периодичностью изображения и проводя попарно их корреляционную обработку, можно оценить величину смещения спекл-картины за период и в конечном итоге восстановить полную траекторию движения поверхности. Здесь имеются некоторые принципиальные отличия от обычных корреляционно-экстремальных методов навигации, где производится сравнение с эталонным изображением [1]. Период регистрации изображений должен быть таким, чтобы обеспечивать их перекрытие и получить высокий коэффициент корреляции. Кроме того, должно обеспечиваться перекрытие областей поверхности, освещаемых лазерным излучением при регистрации каждого кадра.

В результате смещения в каждый момент времени некоторые участки поверхности уходят из освещённой области и перестают участвовать в формировании интерференционной картины, а другие попадают под освещение и вносят свой вклад в интерференцию. Таким образом, при смещении поверхности спекл-картина не только смещается на соответствующую величину, но и претерпевает некоторых изменений. Для работы корреляционного алгоритма необходимо, чтобы в формировании каждого из пары соседних изображений, участвовал некоторый общий участок поверхности. Чем больше площадь общего участка поверхности относительно общей площади освещённой области, тем выше коэффициент корреляции и выше достоверность оценки величины смещения.

При отражении когерентного света от статистически неровной поверхности, шероховатости которой распределены по нормальному закону, в силу линейности преобразований световых волн в пространстве между освещённым участком поверхности и ПЗС-матрицей, поле на её поверхности также будет распределено по нормальному закону. Мощность сигналов на выходе регистрирующих элементов матрицы будет распределена по закону хи-квадрат (как квадрат нормального случайного процесса) с математическим ожиданием равным дисперсии результирующего выходного процесса.

Но при синтезировании ниже полученного алгоритма можно приближенно считать, что флуктуации спекл-картины на выходе ПЗС-матрицы распределены по нормальному закону. Это в некоторой степени нарушает корректность решения задачи. Однако, на практике во многих случаях предположение о нормальности закона распределения приводит к вполне физически оправданным решениям, соответствующим здравому смыслу. При этом алгоритмы, полученные при оптимизационной постановке задачи, дают существенные выигрыши в точности и других показателя качества.

2. Уравнение наблюдения

Исходными данными для решения поставленной задачи являются два изображения фрагментов спекл-картин, зарегистрированных в процессе движения органов станка в два соседних дискретных момента времени. Эти два изображения смещены друг относительно друга на неизвестные величины соответственно по двум взаимно-перпендикулярным осям, но имеют область перекрытия порядка 60 – 80 %.

Для упрощения решения задачи полагаем, что наблюдаемые изображения имеют континуальный характер. Лишь на заключительном этапе решения задачи следует осуществить дискретизацию полученных алгоритмов, учитывая дискретную структуру расположения регистрирующих элементов ПЗС-матрицы. Вначале также полагаем, что приемные элементы матрицы имеют континуальную структуру. При таких предположениях уравнения наблюдения можно записать в таком виде:

$$u_1(x,y)=\Pi\left(\frac{x}{X},\frac{y}{Y}\right)\left[s(x,y)+\xi_1(x,y)\right]=s_1(x,y)+n_1(x,y), \qquad (1)$$

$$u_2(x,y)=\Pi\left(\frac{x-\delta_x}{X},\frac{y-\delta_y}{Y}\right)\left[s(x,y)+\xi_2(x,y)\right]=s_2(x,y)+n_2(x,y),$$

$$x\in\left(-X_n,X_n\right),\quad y\in\left(-Y_n,Y_n\right),$$

где $\mathit{\Pi}\left(\frac{x}{X},\frac{y}{Y}\right)=\begin{cases} 1, & x\in\left(-\frac{X}{2},\frac{X}{2}\right), y\in\left(-\frac{Y}{2},\frac{Y}{2}\right) \\ 0, & x\notin\left(-\frac{X}{2},\frac{X}{2}\right), y\notin\left(-\frac{Y}{2},\frac{Y}{2}\right) \end{cases}$ – прямоугольная срезающая функция, определяющая разрешение ПЗС-матрицы и размеры изображения;

$u_1(x,y)$ – спекл-изображение на выходе ПЗС-матрицы в некоторый начальный момент его регистрации;

$u_2(x,y)$ – изображение, фиксируемое в следующий момент времени;

$s(x,y)$ – предполагаемое континуальное изображение;

$\xi(x,y)$ – аддитивные шумы на наблюдаемых изображениях, которые порождены внутренним состоянием фотоприёмника в разные моменты времени экспозиции изображений, их можно считать статистически независимыми и дельта-коррелированными;

X_n, Y_n – границы области наблюдения изображений.

Для упрощения решения задачи будем считать, что процесс $s(x,y)$ является статистически однородным с корреляционной функцией $R_s(\Delta x,\Delta y)$ и пространственной спектральной плотностью мощности

$$G_S\left(\omega_x,\omega_y\right)=F\left[R_S\left(\Delta x,\Delta y\right)\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_S\left(\Delta x,\Delta y\right) exp\left[j\left(\omega_x \Delta x+\omega_y \Delta y\right)\right] d\Delta x d\Delta y,$$

где $F[\bullet]$ — преобразование Фурье.

3. Постановка оптимизационной задачи

Для упрощения решения оптимизационной задачи воспользуемся одномерной моделью уравнения наблюдения (1):

$$u_1(x)=\mathit{\Pi}\left(\frac{x}{X}\right)\left[s(x)+\xi_1(x)\right]=s_1(x)+n_1(x),$$

$$u_2(x)=\mathit{\Pi}\left(\frac{x-\delta_x}{X}\right)\left[s(x)+\xi_2(x)\right]=s_2(x)+n_2(x),$$

$$x\in\left(-X_n,X_n\right),$$

$$R_S\left(x_1-x_2\right)=\left\langle s\left(x_1\right)s\left(x_2\right)\right\rangle=R_S\left(\Delta x\right), \qquad (2)$$

$$\Delta x=x_1-x_2,$$

$$G_S\left(\omega_x\right)=F\left[R_S\left(\Delta x\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} R_S\left(\Delta x\right) exp\left[j\left(\omega_x \Delta x\right)\right] d\Delta x,$$

$$R_{n1,2}(x_1-x_2)=R_n(x_1-x_2)=\frac{N_0}{2}\delta(x_1-x_2),$$

$$G_{n1,2}(\omega_x)=G_n(\omega_x)=\frac{N_0}{2}.$$

С учетом срезающих функций Π автокорреляционные и взаимно-корреляционные функции одномерных изображений и будут иметь такой вид:

$$R_{S1}(\Delta x)=R_{S2}(\Delta x)=\langle s_1(x_1)s_1(x_2)\rangle=\langle s_2(x_1)s_2(x_2)\rangle=\left(1-\frac{|\Delta x|}{X}\right)R_S(\Delta x),$$

$$R_{S12}(\Delta x)=\langle s_1(x_1)s_2(x_2)\rangle=\left(1-\frac{|\Delta x|}{X}\right)R_S(\Delta x+\delta_x),$$

$$R_{S21}(\Delta x)=\langle s_2(x_1)s_1(x_2)\rangle=\left(1-\frac{|\Delta x|}{X}\right)R_S(\Delta x-\delta_x).$$

Экспериментально эту задачу необходимо решать при условии, что радиус корреляции спеклов меньше величины предполагаемого оцениваемого смещения. Нетрудно показать, что влияние множителя $\left(1-\frac{|\Delta x|}{X}\right)$ при узкой корреляционной функции незначительно и им можно пренебречь. Тогда можно считать, что

$$R_{S1}(\Delta x)=R_{S2}(\Delta x)=R_S(\Delta x),$$

$$R_{S12}(\Delta x)=R_S(\Delta x+\delta_x),$$

$$R_{S21}(\Delta x)=R_S(\Delta x-\delta_x).$$

Если область перекрытия спекл-картин составляет 60 – 80 %, то влиянием сдвига на высоту корреляционной функции здесь можно пренебречь.

4. Решение оптимизационной задачи

Оптимальный алгоритм оценки параметра δ_x находим из решения уравнений правдоподобия вида [4]

$$spur\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\frac{\partial\underline{R}(x_1,x_2,\delta_x)}{\partial\delta_x}\underline{W}(x_1,x_2,\delta_x)dx_1dx_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\vec{u}^T(x_1)\frac{\partial\underline{W}(x_1,x_2,\delta_x)}{\partial\delta_x}\vec{u}(x_2)dx_1dx_2, \qquad (3)$$

где $\vec{u}^T(x)=\|u_1(x),u_2(x)\|$,

$\underline{R}(x_1,x_2,\delta_x)$ – матрица корреляционных функций,

$$\underline{R}(x_1,x_2,\delta_x)=\begin{Vmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\langle u_1(x_1)u_1(x_2)\rangle & \langle u_1(x_1)u_2(x_2)\rangle\\ \langle u_2(x_1)u_1(x_2)\rangle & \langle u_2(x_1)u_2(x_2)\rangle\end{Vmatrix};$$

$\underline{W}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)$ – обратная матрица обратных корреляционных функций, определяемая из уравнения обращения:

$$\int\limits_0^{X_n} \underline{R}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)\underline{W}\left(x_2,x_3,\delta_x\right)dx_2 = \underline{I}\delta\left(x_1-x_3\right); \qquad (4)$$

$\underline{I}$ – единичная матрица;

$\delta\left(x_1-x_3\right)$ – дельта-функция;

$spur$ – след матрицы;

$\langle\bullet\rangle$ – знак статистического усреднения;

$\mu=1,2$.

В координатной форме уравнение (3) примет такой вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^{X_n}\int\limits_0^{X_n}\frac{\partial R_{ij}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)}{\partial\delta_x}W_{ij}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)dx_1dx_2 =$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^{X_n}\int\limits_0^{X_n}\frac{\partial W_{ij}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)}{\partial\delta_x}\vec{u}_i\left(x_1\right)\vec{u}_j\left(x_2\right)dx_1dx_2.$$

Учитывая в уравнении наблюдения (1) независимость, стационарность и идентичность статистических характеристик шумов в различных изображениях, найдем элементы матрицы $\underline{R}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)=\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)$:

$$R_{11}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)=R_{11}\left(\Delta x\right)=\left\langle u_1\left(x_1\right)u_1\left(x_2\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle s_1\left(x_1\right)s_1\left(x_2\right)\right\rangle+\left\langle n_1\left(x_1\right)n_1\left(x_2\right)\right\rangle=R_S\left(\Delta x\right)+R_n\left(\Delta x\right)=R_\Sigma\left(\Delta x\right);$$

$$R_{22}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)=R_{22}\left(\Delta x\right)=\left\langle u_2\left(x_1\right)u_2\left(x_2\right)\right\rangle=R_{11}\left(\Delta x\right)=R_\Sigma\left(\Delta x\right);$$

$$R_{12}\left(x_1,x_2,\vec{\lambda}\right)=\left\langle u_1\left(x_1\right)u_2\left(x_2\right)\right\rangle=\left\langle s\left(x_1\right)s\left(x_1-\Delta x-\delta_x\right)\right\rangle=R_s\left(\Delta x+\delta_x\right);$$

$$R_{21}\left(x_1,x_2,\vec{\lambda}\right)=\left\langle u_2\left(x_1\right)u_1\left(x_2\right)\right\rangle=\left\langle s\left(x_1-\delta_x\right)s\left(x_1-\Delta x\right)\right\rangle=R_s\left(\Delta x-\delta_x\right).$$

Таким образом, матрицу корреляционных функций можно записать в таком виде:

$$\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)=\begin{Vmatrix} R_\Sigma\left(\Delta x\right) & R_s\left(\Delta x+\delta_x\right) \\ R_s\left(\Delta x-\delta_x\right) & R_\Sigma\left(\Delta x\right)\end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

В соответствии с теоремой Хинчина-Винера ей соответствует матрица спектральных плотностей мощности (СПМ)

$$\underline{G}\left(\omega_x,\delta_x\right)=F\left[\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)\right]=\begin{Vmatrix} G_\Sigma\left(\omega_x\right) & G_s\left(\omega_x\right)e^{j\omega_x\delta_x} \\ G_s\left(\omega_x\right)e^{-j\omega_x\delta_x} & G_\Sigma\left(\omega_x\right)\end{Vmatrix}, \qquad (6)$$

где $G_\Sigma\left(\omega_x\right)=G_s\left(\omega_x\right)+G_n\left(\omega_x\right)$.

Зависимости корреляционной функции $\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)$ и энергетического спектра $\underline{G}\left(\omega_x,\delta_x\right)$ от сдвига определяются формулами (5) и (6).

Полагая интервалы корреляции всех процессов (характерные размеры спеклов) значительно меньшими интервала наблюдения $x \in \left(-X_n, X_n\right)$, что, как указывалось, подтверждено экспериментальными исследованиями, а также учитывая их пространственную однородность (стационарность), запишем уравнение правдоподобия (3) в спектральной форме, выразив матрицы корреляционных функций $\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)$ и $\underline{W}\left(\Delta x,\delta_x\right)$ через матрицы их пространственных энергетических спектров в соответствии с теоремой Хинчина-Винера. Тогда в уравнении обращения (4) пределы интегрирования можно заменить на бесконечные, а аргументы корреляционных функций записать в виде разностей $x_1 - x_2$ и $x_2 - x_3$. Применив к уравнению (4) преобразование Фурье, получим:

$$\underline{G}\left(\omega_x,\delta_x\right)\underline{G}_W\left(\omega_x,\delta_x\right) = \underline{I}\,.$$

Тогда:

$$\underline{G}_W\left(\omega_x,\delta_x\right) = \underline{G}^{-1}\left(\omega_x,\delta_x\right),$$

$$\underline{W}\left(\Delta x,\delta_x\right) = F^{-1}\left[\underline{G}^{-1}\left(\omega_x,\delta_x\right)\right].$$

Очевидно также, что

$$F\left[\underline{W}\left(\Delta x,\delta_x\right)\right] = \underline{G}^{-1}\left(\omega_x,\delta_x\right).$$

Подставив в (3) вместо $\underline{R}\left(\Delta x,\delta_x\right)$ и $\underline{W}\left(\Delta x,\delta_x\right)$ их образы Фурье и выполнив простые преобразования, получим уравнение правдоподобия в спектральной форме. Рассмотрим вначале левую часть этого уравнения:

$$spur\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\frac{\partial\underline{R}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)}{\partial\delta_x}\underline{W}\left(x_1,x_2,\delta_x\right)dx_1dx_2 =$$

$$= spur\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\frac{\partial}{\partial\delta_x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}\left(\omega_x,\delta_x\right)e^{j\omega_x\left(x_1-x_2\right)}d\omega_x\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}^{-1}\left(\omega_{x1},\delta_x\right)e^{j\omega_{x1}\left(x_1-x_2\right)}d\omega_{x1}\,dx_1dx_2 =$$

$$= spur\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}'\left(\omega_x,\delta_x\right)\underline{G}^{-1}\left(\omega_{x1},\delta_x\right)\int_0^T\int_0^T e^{j\left(\omega_x+\omega_{x1}\right)\left(x_1-x_2\right)}dx_1dx_2d\omega_xd\omega_{x1} \approx$$

$$\approx spur\frac{T}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}'\left(\omega_x,\delta_x\right)\underline{G}^{-1}\left(\omega_x,\delta_x\right)d\omega_x\,,$$

где $\underline{G}' = \dfrac{d\underline{G}}{d\delta_x}$.

При выводе последнего выражения полагалось, что при большом X_n в одном из интегралов по переменной x можно считать пределы бесконечными и

$$\int_0^{X_n} e^{j(\omega_x+\omega_{x1})(x_1-x_2)}dx_1 \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_x+\omega_{x1})(x_1-x_2)}dx_1 = \delta\left(\frac{\omega_x+\omega_{x1}}{2\pi}\right).$$

При этом также использовано фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\omega_x,\omega_{x1})\delta\left(\frac{\omega_x+\omega_{x1}}{2\pi}\right)d\omega_{x1} = \Psi\left[\omega_x,(-\omega_x)\right],$$

где $\Psi(\omega_x,\omega_{x1}) = \underline{G}'(\omega_x,\delta_x)\underline{G}^{-1}(\omega_{x1},\delta_x)$.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (3):

$$-\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\vec{u}^T(x_1)\frac{\partial \underline{W}(x_1,x_2,\delta_x)}{\partial\delta_x}\vec{u}(x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\vec{u}^T(x_1)\frac{\partial}{\partial\delta_x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)e^{j\omega_x(x_1-x_2)}d\omega_x\right)\vec{u}(x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{X_n}\int_0^{X_n}\vec{u}^T(x_1)\left(\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)\right)'\vec{u}(x_2)e^{j\omega_x(x_1-x_2)}dx_1\,dx_2d\omega_x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\vec{U}}_T^{+}(j\omega_x)\left(\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)\right)'\dot{\vec{U}}_T(j\omega_x)d\omega_x.$$

Таким образом, уравнение правдоподобия (3) в спектральной форме примет вид:

$$spur\,\frac{X_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{G}'(\omega_x,\delta_x)\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)d\omega_x =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\vec{U}}_T^{+}(j\omega_x)\left(\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)\right)'\dot{\vec{U}}_T(j\omega_x)d\omega_x, \quad (7)$$

где $\left(\underline{G}^{-1}(\omega_x,\delta_x)\right)' = \frac{\partial\underline{G}^{-1}}{\partial\delta_x} = -\underline{G}^{-1}\underline{G}'\underline{G}^{-1}$; (8)

$\dot{\vec{U}}_X(j\omega_x)$ — пространственный спектр усеченной интервалом $(0,X_n)$ реализации векторного процесса $\vec{u}(x)$;

$$\dot{\vec{U}}_X(j\omega_x) = \int_0^{X_n}\vec{u}(x)e^{-j\omega_x x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{u}_X(x)e^{-j\omega_x x}dx;$$

$+$ – знак эрмитового сопряжения.

Реально спектр усеченной реализации необходимо рассматривать на интервале $(0,X)$, который определяется размерами ПЗС-матрицы.

В дальнейшем для упрощения расчетов индекс X в спектре усеченной реализации отмечать не будем, $\dot{U}_X\left(j\omega_x\right)=\dot{U}\left(j\omega_x\right)$.

Обращая матрицу СПМ (6), находим:

$$\underline{G}^{-1}\left(\omega_x,\delta_x\right)=\left\|\begin{matrix}\dfrac{G_\Sigma\left(\omega_x\right)}{\Delta\left(\omega_x\right)} & -\dfrac{G_s\left(\omega_x\right)e^{j\omega\delta_x}}{\Delta\left(\omega_x\right)}\\ -\dfrac{G_s\left(\omega_x\right)e^{-j\omega\delta_x}}{\Delta\left(\omega_x\right)} & \dfrac{G_\Sigma\left(\omega_x\right)}{\Delta\left(\omega_x\right)}\end{matrix}\right\|, \tag{9}$$

где $\Delta=G_\Sigma^2-G_s^2$ – определитель матрицы $\underline{G}\left(\omega,\delta_x\right)$.

Производная по параметру δ_x от матрицы СПМ (6):

$$\underline{G}'=\frac{\partial\underline{G}\left(\omega_x,\delta_x\right)}{\partial\delta_x}=G_s\left(\omega_x\right)\left\|\begin{matrix}0 & j\omega e^{j\omega_x\delta_x}\\ -j\omega_x e^{-j\omega_x\delta_x} & 0\end{matrix}\right\|. \tag{10}$$

Для упрощения дальнейших расчетов введем обозначения:

$$\alpha=\frac{G_\Sigma}{\Delta}=\frac{G_\Sigma}{G_\Sigma^2-G_s^2};$$

$$\beta=\frac{G_s}{\Delta}; \tag{11}$$

$$j\omega\delta_x=\gamma.$$

Тогда матрицы (9) и (10), будут иметь вид:

$$\underline{G}^{-1}=\left\|\begin{matrix}\alpha & -\beta e^{\gamma}\\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha\end{matrix}\right\|; \tag{12}$$

$$\underline{G}'=G_s\left\|\begin{matrix}0 & j\omega_x e^{\gamma}\\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0\end{matrix}\right\|.$$

5. Оценка величины взаимного смещения двух спекл-картин

Решим уравнение правдоподобия (7) относительно δ_x.

Правая часть уравнения правдоподобия (7) описывает операции, которые необходимо произвести над принятыми колебаниями $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Такие выражения часто называют достаточными статистиками.

Учитывая (8), (12), представим эту часть уравнения следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\dot{U}}^{+}\left(j\omega_x\right)\left(\underline{G}^{-1}\right)'\vec{\dot{U}}\left(j\omega_x\right)d\omega_x=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\dot{U}}^{+}\left(j\omega_x\right)\underline{G}^{-1}\underline{G}'\,\underline{G}^{-1}\vec{\dot{U}}\left(j\omega_x\right)d\omega_x=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\dot{U}}_W^{+}\left(j\omega_x\right)\underline{G}'\vec{\dot{U}}_W\left(j\omega_x\right)d\omega_x,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{U}}^{+}(j\omega_x)\left(\underline{G}^{-1}\right)' \dot{\vec{U}}(j\omega_x)\,d\omega_x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{U}}^{+}(j\omega_x)\underline{G}^{-1}\underline{G}'\underline{G}^{-1}\dot{\vec{U}}(j\omega_x)\,d\omega_x = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{U}}_W^{+}(j\omega_x)\,\underline{G}'\dot{\vec{U}}_W(j\omega_x)\,d\omega_x,$$

где

$$\dot{\vec{U}}_W^{+}(j\omega_x) = \dot{\vec{U}}^{+}(j\omega_x)\underline{G}^{-1} = \left\|\dot{U}_1^*,\ \dot{U}_2^*\right\| \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta e^{\gamma} \\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\|\alpha\dot{U}_1^* - \beta\dot{U}_2^* e^{-\gamma},\ \alpha\dot{U}_2^* - \beta\dot{U}_1^* e^{\gamma}\right\| = \left\|\dot{U}_{W1}^*(j\omega_x), \dot{U}_{W2}^*(j\omega_x)\right\|,$$

$$\dot{\vec{U}}_W(j\omega_x) = \underline{G}^{-1}\dot{\vec{U}}(j\omega_x) = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta e^{\gamma} \\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{U}_1(j\omega_x) \\ \dot{U}_2(j\omega_x) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha\dot{U}_1 - \beta\dot{U}_2 e^{\gamma} \\ \alpha\dot{U}_2 - \beta\dot{U}_1 e^{-\gamma} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{U}_{W1}(j\omega_x) \\ \dot{U}_{W2}(j\omega_x) \end{Vmatrix}.$$

Учитывая (12), последовательно находим:

$$\underline{G}'\dot{\vec{U}}_W = G_s \begin{Vmatrix} 0 & j\omega_x e^{\gamma} \\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha\dot{U}_1 - \beta\dot{U}_2 e^{\gamma} \\ \alpha\dot{U}_2 - \beta\dot{U}_1 e^{-\gamma} \end{Vmatrix} = G_s \begin{Vmatrix} j\omega_x\alpha\dot{U}_2 e^{\gamma} - j\omega_x\beta\dot{U}_1 \\ -j\omega_x\alpha\dot{U}_1 e^{-\gamma} + j\omega_x\beta\dot{U}_2 \end{Vmatrix},$$

где, на основании (11),

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{G_\Sigma}{G_\Sigma^2 - G_s^2}\right)^2 - \left(\frac{G_s}{G_\Sigma^2 - G_s^2}\right)^2 = \frac{1}{\Delta};$$

$$G_s\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = \frac{G_s}{\Delta} = \beta.$$

Интегрируя это выражение, получим правую часть уравнения правдоподобия в таком виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)} \dot{U}_1^*(j\omega_x) \frac{\partial}{\partial\delta_x}\left[\dot{U}_2(j\omega_x) e^{j\omega_x\delta_x}\right] d\omega_x +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)} \dot{U}_1(j\omega_x) \frac{\partial}{\partial\delta_x}\left[U_2^*(j\omega_x) e^{-j\omega_x\delta_x}\right] d\omega_x. \qquad (13)$$

Рассмотрим структуру множителя $\beta = \dfrac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)}$.

$$\frac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)} = \frac{G_s}{G_\Sigma^2 - G_s^2} = \frac{G_s}{(G_s + G_n)^2 - G_s^2} = \frac{G_s}{2G_s G_n + G_n^2} = \frac{G_s(\omega_x)/G_n}{2G_s(\omega_x) + G_n}. \qquad (14)$$

Структура этого множителя характеризует операции согласованной фильтрации (числитель) и декорреляции колебаний $u_1(x)$ и $u_2(x)$ (знаменатель). Этот множитель представляет собой квадрат модуля АЧХ согласованного (числитель) и декоррелирующего (знаменатель) фильтров.

Используя понятие формирующего фильтра, широко применяющееся при моделировании случайных процессов с заданным энергетическим спектром, в соответствии с которым энергетический спектр на выходе фильтра связан с энергетическим спектром некоторого формирующего белого шума на входе соотношением

$$G_s\left(\omega_x\right)=\frac{N_{0\,form}}{2}\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2, \tag{15}$$

а также учитывая, что $G_n=\frac{N_0}{2}$, получим:

$$\begin{aligned}\left|\dot{K}_w(\omega_x)\right|^2&=\frac{G_s(\omega)}{\Delta(\omega)}=\frac{G_s\left(\omega_x\right)/G_n}{2G_s\left(\omega_x\right)+G_n}=\frac{N_{0\,form}\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2/N_0}{N_{0\,form}\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2+\dfrac{N_0}{2}}=\\&=\frac{1}{N_0}\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2\frac{1}{\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2+\dfrac{N_0}{2N_{0\,form}}}\end{aligned} \tag{16}$$

или

$$\left|K_w(\omega_x)\right|^2=\frac{1}{N_0}\left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^2\left|W(\omega_x)\right|^2,$$

где $\dot{K}_{co}(j\omega_x)=K_{form}(j\omega_x)$ — АЧХ фильтра, согласованного с энергетическим спектром полезного спекл-изображения (совпадающего с формой $G_s\left(\omega_x\right)$);

$W(\omega)$ — АЧХ декоррелирующего фильтра, имеющая инверсный вид по отношнию к форме спектра $G_s(\omega_x)$:

$$W(\omega)=\frac{1}{\left|K_{form}\left(j\omega_x\right)\right|^2+\dfrac{N_0}{2N_{0\,form}}}. \tag{17}$$

Отношение $\frac{N_0}{2N_{0\,form}}$ является аналогом обратного энергетического отношения сигнал-шум. Степень инверсности этого фильтра и, соответственно, степень декорреляции спекл-изображения будет тем выше, чем выше энергетическое отношение сигнал-шум $\frac{N_{0\,form}}{N_0}$. Отношение это является статистическим регуляризатором рассматриваемой обратной задачи, исключающем в АЧХ деление на ноль.

Рассмотрим левую часть уравнения (7). В ней

$$spur\underline{G}'\underline{G}^{-1} = spurG_s \begin{Vmatrix} 0 & j\omega_x e^{\gamma} \\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta e^{\gamma} \\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha \end{Vmatrix} =$$

$$= spur\ G_s \begin{Vmatrix} -j\omega_x\beta & j\omega_x\alpha e^{\gamma} \\ -j\omega_x\alpha e^{-\gamma} & j\omega_x\beta \end{Vmatrix} = 0.$$

Тогда выражение (13) приравнивается к нулю. С учетом выражений (14) – (17) уравнение правдоподобия примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\delta_x}\int_{-\infty}^{\infty} U_{1CW}^{*}(j\omega_x)\dot{U}_{2\,CW}(j\omega_x)e^{j\omega_x\delta_x}d\omega_x +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\delta_x}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}_{2\,CW}^{*}(j\omega_x)\dot{U}_{1\,CW}(j\omega_x)e^{-j\omega_x\delta_x}d\omega_x = 0, \qquad (18)$$

где $\dot{U}_{CW}(j\omega_x) = \dot{K}_w(\omega_x)\dot{U}_W(j\omega_x)$ – пространственный сигнал, подвергнутый пространственной согласованной фильтрации и декорреляции.

Используя преобразование Фурье, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\delta_x}\int_{0}^{X_n} u_{1CW}(x-\delta_x)u_{2CW}(x)dx = 0, \qquad (19)$$

где $u_{CW}(x)$ – процессы на выходе фильтров с результирующей АЧХ $K_w(\omega_x)$:

$$u_{CW}(x) = F^{-1}\left[\dot{U}_{CW}(j\omega_x)\right] = F^{-1}\left[K_w(\omega_x)\dot{U}(j\omega_x)\right].$$

Для того чтобы проинтерпретировать полученный результат найдем среднее значение любой из функций когерентности, входящих в выражения (13) и (18):

$$\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)}\dot{U}_1^{*}(j\omega_x)\dot{U}_2(j\omega_x)e^{j\omega_x\delta_x}d\omega_x \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}_{1CW}^{*}(j\omega_x)\dot{U}_{2CW}(j\omega_x)e^{j\omega_x\delta_x}d\omega_x \right\rangle = \left\langle \int_{0}^{X_n} u_{1CW}(x)u_{2CW}(x+\delta_x)dx \right\rangle,$$

Усредняя первое выражение, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_s(\omega_x)}{\Delta(\omega_x)}\left\langle \dot{U}_1^{*}(j\omega_x)\dot{U}_2(j\omega_x)\right\rangle e^{j\omega_x\delta_x}d\omega_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}X_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_s^2}{\Delta(\omega_x)}e^{j\omega_x(\delta_x-\delta_{xi})}d\omega_x = X_n R_{SW}(\delta_x-\delta_{xi}), \qquad (20)$$

где

$$\left\langle \dot{U}_1^{*}(j\omega_x)\dot{U}_2(j\omega_x)\right\rangle = \left\langle \dot{S}^{*}(j\omega_x)S(j\omega_x)\right\rangle e^{-j\omega_x\delta_{xi}} =$$

$$=\left\langle \left| \dot{S}(j\omega_x)\right|^2 \right\rangle e^{-j\omega_x \delta_{xi}} \approx X_n G_s(\omega_x) e^{-j\omega_x \delta_{xi}}, \tag{21}$$

δ_{xi} — истинное значение величины смещения.

При выводе (21) было учтено, что $s(x,\delta_x)$ и $n(x)$ — взаимно независимые случайные процессы. Функция $R_{SW}(\delta_x - \delta_{xi})$ является корреляционной функцией полезного спекл-изображения $s(x,\delta_x)$, прошедшего пространственный декоррелирующий фильтр с АЧХ

$$\left|\dot{K}_w(\omega_x)\right| = \sqrt{G_s(\omega_x)/\Delta(\omega_x)}.$$

Пространственная фильтрация осуществляется над выходными сигналами ПЗС-матрицы программным образом в вычислительном устройстве. Корреляционная функция $R_{SW}(\delta_x - \delta_{xi})$ также совпадает с взаимной функцией корреляции декоррелированных спекл-картин $s(x)$ и $s(x-\delta_x)$, экспонированных в два различных момента времени в процессе движения органов станка. Функция достигает максимума при $\delta_x - \delta_{xi} = 0$. Уравнение (19) будет равно нулю, если интеграл

$$\widehat{R}_{SW}(\delta_x - \delta_{xi}) = \int_0^{X_n} u_{1Wt3}(x-\delta_x) u_{2Wt3}(x) dx,$$

являющийся оценкой функции взаимной корреляции (вещественной функции когерентности) процессов $u_{1W}(x)$ и $u_{2W}(x)$, полученных после согласованной фильтрации и декорреляции наблюдений $u_1(x)$ и $u_2(x)$, принимает максимальное значение.

Таким образом, для нахождения оптимальной оценки смещения необходимо выполнить следующие операции:

1) принять колебания $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и подвергнуть их согласованной фильтрации и декорреляции в фильтре с АЧХ (16);

2) сформировать функцию взаимной корреляции (19);

3) найти максимум этой функции корреляции или нулевое значение ее производной, варьируя величиной смещения δ_x.

Формирователь оценки функции взаимной корреляциии и ее производной составляют структуру оптимального дискриминатора (различителя) смещений. Производная от взаимной корреляционной функции $R_{SW}(\delta_x - \delta_{xi})$ является его дискриминационной характеристикой.

По определению, применительно к устройствам автоматического регулирования, дискриминационная характеристика – это зависимость среднего значения выходного напряжения дискриминатора от разности истинного и оценочного значений измеряемого параметра, в данном случае от $\tau = \delta_x - \delta_{xi}$.

Выходной сигнал дискриминатора пропорционален производной (19), а его среднее значение (дискриминационная характеристика) на основании (20) будет равно

$$\left\langle V_{out}(\tau)\right\rangle = X_n \frac{dR_{sW}(\tau)}{d\tau}.$$

6. Расчёт предельных погрешностей оценки смещения δ_x

Предельные погрешности оценок нескольких неизвестных параметров $\vec{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_N \right)$ определяются диагональными элементами ковариационной матрицы ошибок, обратной информационной матрице Фишера:

$$\left\| B_{\mu\nu} \right\|^{-1} = -\left. \left\| spur \frac{1}{2} \int_0^{X_n} \int_0^{X_n} \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} \underline{R}\left(x_1, x_2, \vec{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} \underline{W}(x_1, x_2, \vec{\lambda}) dx_1 dx_2 \right\|^{-1} \right|_{\vec{\lambda} = \hat{\vec{\lambda}}} .$$

В спектральной области это уравнение примет вид:

$$\left\| B_{\mu\nu} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} B_{\lambda_1\lambda_1} & B_{\lambda_1\lambda_2} & \cdots & B_{\lambda_1\lambda_N} \\ B_{\lambda_2\lambda_1} & B_{\lambda_2\lambda_2} & \cdots & B_{\lambda_2\lambda_N} \\ B_{\lambda_N\lambda_1} & B_{\lambda_N\lambda_2} & \cdots & B_{\lambda_N\lambda_N} \end{matrix} \right\|^{-1} =$$

$$= -\left. \left\| spur \frac{1}{4\pi} X_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \underline{G}'_\mu(\omega_x, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_\mu} \frac{\partial \underline{G}^{-1}(\omega_x, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_\nu} \right\|^{-1} \right|_{\vec{\lambda} = \hat{\vec{\lambda}}} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} spur \dfrac{1}{4\pi} X_n \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G'_\mu(\omega_x) \underline{G}^{-1}(\omega_x) \times \\ \times G'_\nu(\omega_x) \underline{G}^{-1}(\omega_x) d\omega_x \end{matrix} \right\|^{-1} .$$

Здесь $\hat{\vec{\lambda}}$ – оценки параметров $\vec{\lambda}$. На главной диагонали этой матрицы будут расположены дисперсии оценок параметров, являющиеся предельно достижимыми. В соответствии с теорией Рао-Крамера при данных условиях их нельзя получить меньшими.

В рассматриваемой задаче неизвестен лишь один параметр – δ_x. Предельная погрешность его оценки определяется такими формулами:

$$\sigma^2_{\delta_x} = B^{-1}_{\delta_x\delta_x} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} spur \int_0^{X_n} \int_0^{X_n} \frac{\partial}{\partial \delta_x} \underline{R}\left(x_1, x_2, \delta_x \right) \frac{\partial}{\partial \delta_x} \underline{W}(x_1, x_2, \delta_x) dx_1 dx_2 \right|_{\delta_x = \hat{\delta}_x} \Bigg\}^{-1} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4\pi} X_n spur \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \delta_x} \underline{G}(\omega_x, \delta_x) \frac{\partial}{\partial \delta_x} \underline{G}^{-1}(\omega_x, \delta_x) \right\}^{-1} =$$

$$=\left\{\frac{1}{4\pi}X_n spur\int\limits_{-\infty}^{\infty}G'(\omega_x)\underline{G}^{-1}(\omega_x)G'(\omega_x)\underline{G}^{-1}(\omega_x)d\omega_x\right\}^{-1}.$$

Напомним, что

$$\underline{G}'=\frac{\partial\underline{G}(\omega_x,\delta_x)}{\partial\delta_x}=G_s(\omega_x)\begin{Vmatrix}0 & j\omega e^{\gamma}\\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0\end{Vmatrix};$$

$$j\omega\delta_x=\gamma;$$

$$G_s(\omega_x)=\frac{N_{0\,form}}{2}\left|K_{form}(j\omega_x)\right|^2.$$

Вычислим элемент $B_{\delta_x\delta_x}$:

$$B_{\delta_x\delta_x}=spur\frac{1}{4\pi}X_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underline{G}'(\omega_x)\underline{G}^{-1}(\omega_x)\underline{G}'(\omega_x)\underline{G}^{-1}(\omega_x)d\omega_x=$$

$$=spur\frac{1}{4\pi}X_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_S^2\begin{Vmatrix}0 & -j\omega_x e^{\gamma}\\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\alpha & -\beta e^{\gamma}\\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}0 & j\omega_x e^{\gamma}\\ -j\omega_x e^{-\gamma} & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\alpha & -\beta e^{\gamma}\\ -\beta e^{-\gamma} & \alpha\end{Vmatrix}d\omega_x=$$

$$=\frac{1}{4\pi}X_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}2G_S^2(\omega_x)\omega_x{}^2(\alpha^2-\beta^2)d\omega_x.$$

На основе (11) имеем:

$$B_{\delta_x\delta_x}=\frac{1}{2\pi}X_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_s^2(\omega_x)\omega_x{}^2(\alpha^2-\beta^2)d\omega_x=$$
$$=\frac{1}{2\pi}X_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_x{}^2G_s^2(\omega_x)}{G_\Sigma^2-G_S^2}d\omega_x. \qquad (22)$$

Сопоставляя (20) и (22), нетрудно увидеть, что элемент $B_{\delta_x\delta_x}$ является второй производной от корреляционной функции при $\delta_x=\delta_{xi}$, т.е. $\tau=0$:

$$B_{\delta_x\delta_x}=X_n\left.\frac{d^2R_{SW}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

Для выяснения потенциальных возможностей измерения смещения δ_x необходимо найти параметры этой корреляционной функции.

Учитывая обозначения (2), (14)–(17) и формулу (22), запишем этот элемент матрицы в таком виде:

$$B_{\delta_x\delta_x} = \frac{1}{2\pi} X_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\omega_x}^2 G_s^2(\omega_x)}{G_\Sigma^2 - G_S^2} d\omega_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} X_n \int_{-\infty}^{\infty} {\omega_x}^2 \left|K_w(\omega_x)\right|^2 G_s(\omega_x) d\omega_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} X_n \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} {\omega_x}^2 \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^2 \left|W(\omega_x)\right|^2 G_s(\omega_x) d\omega_x =$$

$$= \frac{N_{0\,form}}{4\pi} X_n \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} {\omega_x}^2 \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4 \left|W(\omega_x)\right|^2 d\omega_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} X_n \int_{-\infty}^{\infty} {\omega_x}^2 G_{sW}(\omega_x) d\omega_x,$$

где $G_{sW}(\omega_x)$ – спектральная плотность мощности процессов $s_1(x)$ и $s_2(x)$ после согласованной фильтрации и декорреляции в фильтрах с результирующей АЧХ $\left|K(\omega_x)\right|$:

$$G_{sW}(\omega) = \left|K_w(\omega_x)\right|^2 G_s(\omega_x) =$$

$$= \left|K_w(\omega_x)\right|^2 \frac{N_{0\,form}}{2} \left|\dot{K}_{form}(j\omega)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{N_0} \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^2 \left|W(\omega_x)\right|^2 \frac{N_{0\,form}}{2} \left|\dot{K}_{form}(j\omega_x)\right|^2 =$$

$$= \frac{N_{0\,form}}{2N_0} \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4 \left|W(\omega_x)\right|^2,$$

$$\dot{K}_{co}(j\omega_x) = \dot{K}_{form}(j\omega_x).$$

Энергетическому спектру $G_{sW}(\omega_x)$ соответствует по теории Хинчина-Винера корреляционная функция

$$R_{sW}(\tau) = F^{-1}\left[G_{sW}(\omega_x)\right];$$

$$\tau = \delta_x - \delta_{xi}.$$

При этом нормированную корреляционную функцию можно записать в виде

$$r_{sW}(\tau) = \frac{R_{sW}(\tau)}{R_{sW}(0)} = \frac{\frac{N_{0\,form}}{2N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4 \left|W(\omega_x)\right|^2 e^{j\omega_x\tau} d\omega_x}{\frac{N_{0\,form}}{2N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4 \left|W(\omega_x)\right|^2 d\omega_x}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4\left|W(\omega_x)\right|^2 e^{j\omega_x\tau}d\omega_x = r_{sW}(\tau)\Delta f_e\ ;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_x^2\left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4\left|W(\omega_x)\right|^2 d\omega_x = \left(\left.\frac{d^2 r_{sW}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}\right)\Delta f_e\ ,$$

где Δf_e – эффективная ширина полосы пространственных частот, занимаемая спектром $G_{sW}\left(\omega_x\right)$:

$$\Delta f_e = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{K}_{co}(j\omega_x)\right|^4\left|W(\omega_x)\right|^2 d\omega_x\ .$$

Таким образом,

$$B_{\delta_x\delta_x} = X_n\left.\frac{d^2 R_{sw}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = \psi X_n \Delta f_э \left.\frac{d^2 r_{sw}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}\ ,$$

где $\psi = \dfrac{N_{0\,form}}{2N_0}$ – аналог отношения сигнал-шум по энергии.

Выводы

Алгоритм корреляционно-экстремальной обработки спекл-изображений освещенных лазерным излучением участков шероховатой поверхности рабочих органов металлорежущих станков, который получен в результате оптимизационной постановки задачи и ее решения позволяет существенно повысить точность оценки величины смещения изображений и в целом повысить точность оценки траектории относительного перемещения органов станка.

Прежде всего, это связано с применением лазера как источника когерентного излучения, позволяющего получить интерференционные спекл-картины. Они имеют вид пространственных случайных процессов со сравнительно малыми радиусами корреляции, которые определяются размерами спеклов. Сам алгоритм позволяет получить более высокую точность оценки смещения за счёт пространственной обработки спекл-картин, содержащей операции согласованной и инверсной фильтрации.

Согласованная фильтрация, осуществляемая фильтром с АЧХ, соответствующей форме пространственного энергетического спектра спекл-картины, обеспечивает подавление высокочастотных компонент внутреннего шума ПЗС-матрицы.

Инверсная фильтрация осуществляет декорреляцию спекл-изображения как пространственного случайного процесса, уменьшает ширину корреляционной функции и соответственно размеры спеклов и тем самым повышает точность оценки смещения спекл-картин. Степень инверсной фильтрации и ширина результирующей АЧХ зависят от величины энергетического отношения сигнал-шум. Чем больше это отношение, тем шире АЧХ и ее подъем в области высоких пространственных частот.

Важным результатом является непосредственно оценка потенциальной точности (предельной погрешности), найденная в соответствии с теорией Рао-Крамера путем вычисления второй производной от логарифма функционала правдоподобия. Эта точность определяется радиусом корреляции (шириной корреляционных функций) декоррелированных спекл-картин, а также энергетическим отношением сигнал-шум.

Список литературы

1. Баклицкий, В. К. Корреляционно-экстремальные методы навигации [Текст]/ В. К. Баклицкий, А. Н. Юрьев – М.: Радио и Связь, 1982. – 256 с.
2. Франсон, М. Оптика спеклов [Текст]/ М. Франсон – М.: Мир, 1980. – 172 с.
3. Когерентная оптика [Текст]: учеб. пособие по курсу «Когерентная и нелинейная оптика» / В.Г. Магурин, В.А. Тарлыков. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 122 с.
4. Волосюк, В. К. Оптимизация обработки сигналов в радиотехнических системах [Текст]/ В. К. Волосюк – Х.: ХАИ, 2007. – 86 с.

Рецензент: д. т. н., проф. В. Ф. Сорокин, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 10.12.2013

Синтез оптимального алгоритму оцінки відносного зміщення лазерних спекл-зображень шорстких поверхонь

Розглянуто кореляційно-екстремальний метод обробки серії спекл-зображень, отриманих при освітленні лазерним випромінюванням робочих органів металорізальних верстатів з метою оцінки величини зміщення досліджуваної поверхні. Поставлена і вирішена задача знаходження оптимального алгоритму оцінки величини зміщення спекл-зображення. Розраховані граничні похибки визначення величини зміщення спекл-зображення.

Ключові слова: спекл-картина, кореляція, оптимізаційна задача, гранична похибка, рівняння спостереження, шорстка поверхня.

Synthesis of optimal algorithm for estimating the relative shift of laser speckle images of a rough surfaces

Correlative extreme processing method of a speckle images series obtained with laser illumination of metal working milling considered to evaluate the magnitude of analyzed surface displacement. Posed and solved the problem of finding the displacement of the speckle image estimates optimal algorithm. Calculated marginal error in determining the displacement of the speckle image.

Keywords: speckle pattern, correlation, optimization problem, limit error, observation equation, rough surface.