УДК 004.942
Ю.А. Романенков, В.М. Вартанян, В.Ю. Кащеева

Система количественных оценок локализации корней интервальных полиномиальных моделей

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрены методы решения квадратного интервального уравнения, предложена система количественных оценок локализации вещественных корней, проиллюстрированная количественным примером.
Ключевые слова: интервальная модель, локализация корней полинома, аппроксимация, интервальный дискриминант.

Постановка проблемы. При описании динамических объектов нередко используют модели с нечетко заданными параметрами, учитывающие разного рода неопределенность в параметрах объекта и внешней среды.

Одним из способов учета неопределенности объекта путем параметрической нечеткости модели служит интервальный анализ [1], в рамках которого неопределенность трактуется в широком контексте, включающем в себя не только случайность, но и незнание, неединственность возможных исходов, вариабельность переменных (не только случайную, но и систематическую) и т.д.

Анализ последних исследований и публикаций. Рассмотрим расширение числового квадратного уравнения по множеству параметров

$$F(x) = x^2 + [b]x + [c] = 0, \quad (1)$$

где $[b] = \left[b^-;\ b^+\right]$ и $[c] = \left[c^-;\ c^+\right]$ – интервальные коэффициенты.

Одним из подходов к отысканию корней интервального уравнения (1) является метод интервального дискриминанта [2].

В соответствии с ним интервалы значений корней определяются выражениями

$$\left[x_{1,2}\right] = \begin{cases} \left[\dfrac{-b^+}{2};\ \dfrac{-b^-}{2}\right] \pm \left[\dfrac{\sqrt{D^-}}{2};\ \dfrac{\sqrt{D^+}}{2}\right], \text{ } если\ D > 0, \\ \left[\dfrac{-b^+}{2};\ \dfrac{-b^-}{2}\right] \pm i\left[\dfrac{\sqrt{-D^+}}{2};\ \dfrac{\sqrt{-D^-}}{2}\right], \text{ } если\ D < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $i^2 = -1$, а интервальный дискриминант имеет вид

$$[D] = \left[D^-;\ D^+\right] = [b]^2 - 4[c]. \quad (3)$$

В рамках данной статьи будем рассматривать случай, когда интервальный дискриминант положительный.

Отметим, что интервалы значений корней, полученные из выражения (2), имеют одинаковую ширину, несмотря на то, что интервалы значений корней исходного уравнения (1) имеют разную ширину. При этом полученные интервальные значения содержат в себе истинные корни интервального квадратного уравнения (1).

Взаимное расположение интервалов значений корней определяется, кроме значения интервального дискриминанта, еще и так называемой определяющей точкой, координаты которой вычисляют следующим образом:

$$x_V = -\frac{1}{4}\left(b^- + b^+\right),\ F_V = \frac{1}{16}\left(b^+ - b^-\right)^2 - \frac{1}{4}D^-. \qquad (4)$$

В соответствии с методом интервального дискриминанта, если $[D] > 0$ и $F_V < 0$, то уравнение (1) имеет два различных вещественных корня, локализованных в интервалах $[x_1] = \left[x_1^-;\ x_1^+\right]$, $[x_2] = \left[x_2^-;\ x_2^+\right]$.

Другой аналитический метод нахождения границ интервалов значений корней уравнения (1) получил название «метод фиксированного аргумента» [3].

Суть его состоит в следующем. На плоскости корней ищут точку, соответствующую корням уравнения (1) со средними интервальными значениями коэффициентов. Далее из соотношений теоремы Виета

$$x_1 + x_2 = -[b_1],\ x_1 \cdot x_2 = [b_0], \qquad (5)$$

фиксируя поочередно один из корней, определяют границы значений другого корня, причем из двух полученных интервалов выбирают более «узкий».

Еще один подход к нахождению корней уравнения (1) основан на графическом представлении области решений уравнения с последующей интервальной аппроксимацией прямоугольной областью в плоскости корней.

Все перечисленные методы позволяют определить границы интервалов локализации корней уравнения (1). Однако решения, полученные этими методами, не совпадают, что можно объяснить многовариантностью аппроксимации области расположения корней прямоугольной областью.

Постановка задачи. В связи с этим возникает задача формирования системы количественных оценок локализации корней интервального уравнения (1), по которым можно сравнивать между собой решения, полученные разными методами.

Изложение основного материала. Одним из вариантов такой системы оценок может выступать следующий.

1. Середина интервала значения корня:

$$mid[x_1] = \frac{x_1^- + x_1^+}{2},\ mid[x_2] = \frac{x_2^- + x_2^+}{2}. \qquad (6)$$

2. Ширина интервала значения корня – разница между верхней и нижней границами интервала:

$$wid[x_1] = x_1^+ - x_1^-,\ wid[x_2] = x_2^+ - x_2^-. \qquad (7)$$

3. Площадь аппроксимирующего прямоугольника на плоскости корней – произведение ширины двух интервалов ($S_2 + S_3$ на рис. 1):

$$S_{[x]} = S_2 + S_3 = wid[x_1] \cdot wid[x_2]. \qquad (8)$$

Эта величина косвенно свидетельствует о степени аппроксимации, в некоторых задачах может задаваться ее предельно допустимое значение.

4. Коэффициент перекрытия аппроксимирующим прямоугольником действительной области решений (отношение $\frac{S_2}{S_1}$ на рис. 1):

$$\alpha = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (9)$$

5. Коэффициент избыточности аппроксимации (отношение площади области «лишних» корней S_3 к площади аппроксимирующего прямоугольника $S_2 + S_3$ на рис. 1):

$$\beta = \frac{S_3}{S_{[x]}} = \frac{S_3}{S_2 + S_3}. \qquad (10)$$

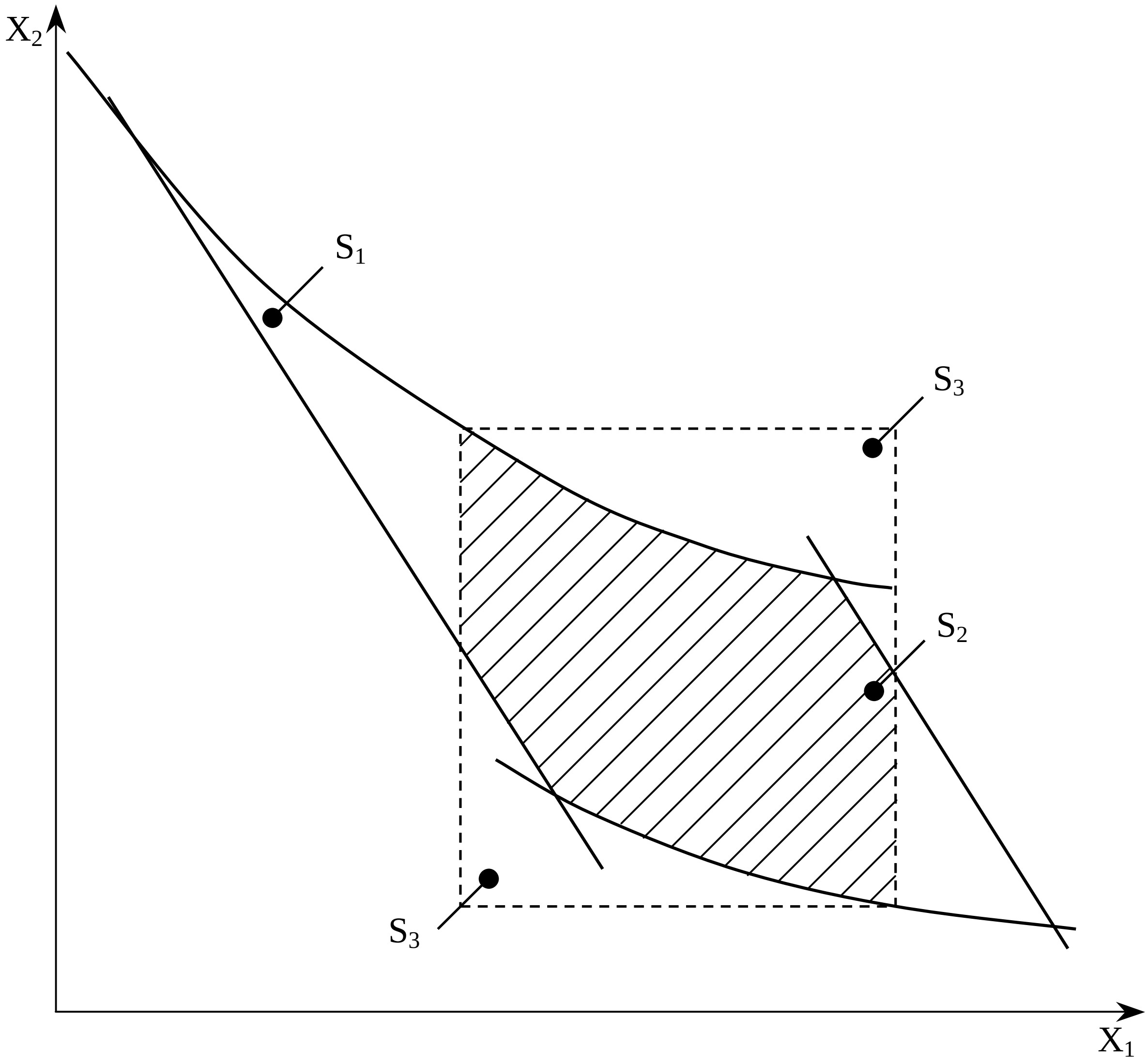

Рис. 1. Аппроксимация вещественных корней интервального квадратного уравнения прямоугольной областью

Пример. В качестве примера рассмотрим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 - [5;7]x + [4;6] = 0. \qquad (11)$$

На рис. 2 показано решение этого уравнения в плоскости корней.

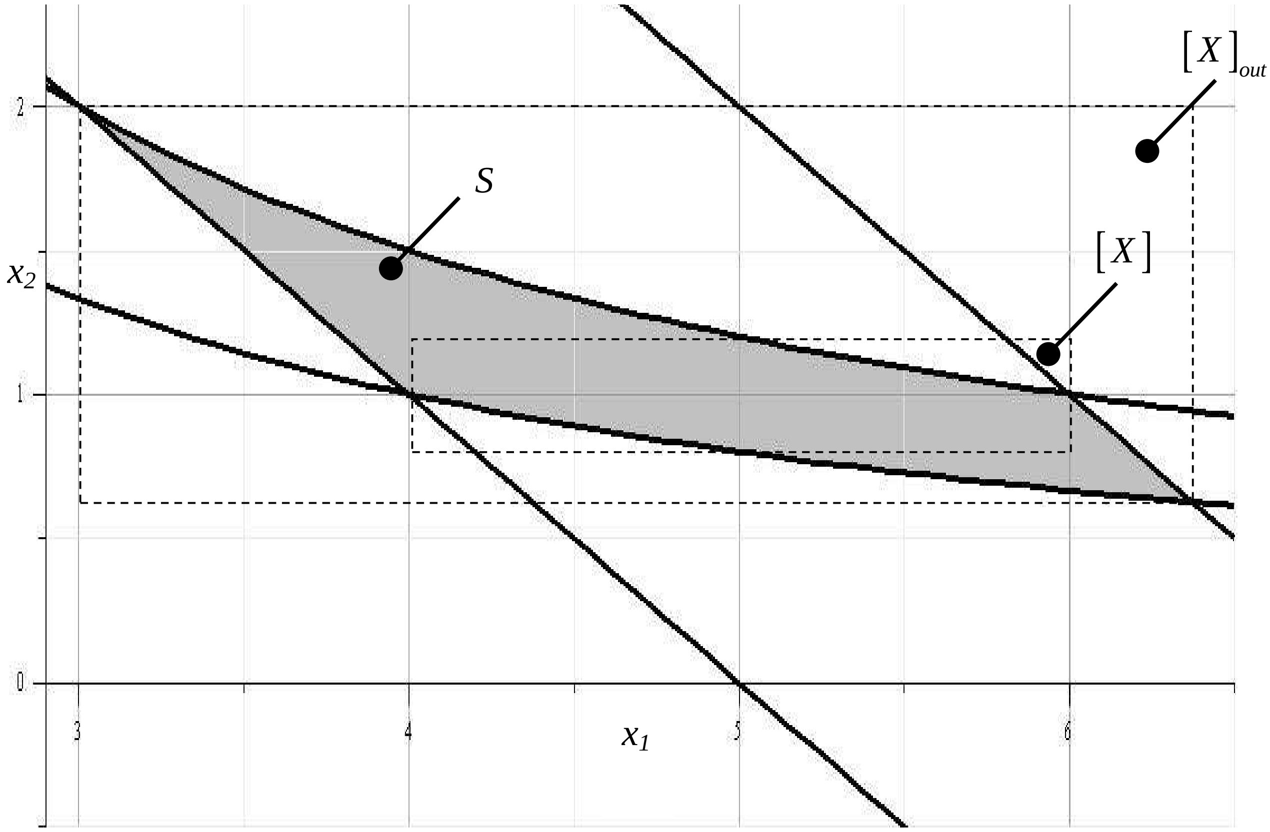

Рис. 2. Область решений квадратного уравнения с вещественными корнями

Применив для решения квадратного приведенного уравнения (11) с интервально заданными коэффициентами три различных подхода, получим три различные пары интервалов значений корней. Сведем полученные результаты в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики интервальных корней, найденных тремя методами

Оценки	Метод		
	графический	фиксированного аргумента	интервального дискриминанта
Интервал значений корня 1	$[3;\ 6.37]$	$[4;\ 6]$	$[3;\ 6.37]$
Интервал значений корня 2	$[0.63;\ 2]$	$[0.8;\ 1.2]$	$[-0.37;\ 3]$
Площадь аппроксимирующего прямоугольника	4.6169	0.8	11.3569
Степень перекрытия действительной области расположения корней	полное	частичное	полное
Существование «лишних» пар корней	есть	есть	есть

Рассчитаем предлагаемые выше оценки для численного примера (11) и сведем их в табл. 2.

Таблица 2

Количественные оценки локализации корней, найденных тремя методами

Оценки	Метод		
	графический	фиксированного аргумента	интервального дискриминанта
$[x_1]$	$[3;\ 6.37]$	$[4;\ 6]$	$[3;\ 6.37]$
$[x_2]$	$[0.63;\ 2]$	$[0.8;\ 1.2]$	$[-0.37;\ 3]$
$mid[x_1]$	4.685	5	4.685
$mid[x_2]$	1.315	1	1.315
$wid[x_1]$	3.37	2	3.37
$wid[x_2]$	1.37	0.4	3.37
$S_{[x]}$	4.6169	0.8	11.3569
α	1	0.547	1
β	0.762	0.2325	0.903

Как видно из табл. 2, графический метод и метод интервального дискриминанта позволяют определить аппроксимирующую область, полностью включающую в себя действительную область расположения корней, однако при этом коэффициент избыточности значительно превышает 0,5. Это означает, что в полученных этими методами аппроксимирующих прямоугольниках – 77 и 90% «лишних» комбинаций корней соответственно. Такая избыточность аппроксимации безусловно снижает точность решения практических задач, хотя в некоторых случаях допустима.

Метод фиксированного аргумента позволяет найти аппроксимирующую область, перекрывающую действительную область расположения корней на 55%, и содержащую 23% «лишних» комбинаций корней. Однако центр полученной области всегда расположен в точке, соответствующей решению уравнения со средними коэффициентами, что в рамках интервального анализа не является строго обоснованным (эта точка не может считаться «наиболее вероятной», «предпочтительной», «обоснованной» и т.д.). Из рис. 2 видно, что размеры области $[X]$ (т.е. ширина искомых корней) могут быть изменены в любую сторону, если этого требуют особенности конкретной практической задачи.

Нельзя однозначно утверждать, что один из методов позволяет получить лучшие результаты по сравнению с двумя остальными. Именно поэтому предлагается группа количественных оценок, по которым можно сравнить качество аппроксимации искомых вещественных корней.

Сравнивая показатели аппроксимации для графического метода и метода интервального дискриминанта, отметим следующие особенности:

1) интервалы значений одного из пары корней (большего по среднему значению и ширине) совпадают для двух методов;

2) второй интервал (меньший по среднему значению и ширине) искусственно «расширяется» методом интервального дискриминанта до ширины первого (большего), причем центр интервала остается прежним;

3) имеет место увеличение аппроксимирующего прямоугольника, а следовательно, и доли в нем «лишних» комбинаций корней (коэффициента избыточно-

сти аппроксимации β).

Получение методом интервального дискриминанта интервалов значений корней одинаковой ширины указано в [2] среди достоинств метода. Однако, на наш взгляд, эта особенность может быть удобной, но вряд ли полезной, так как ведет к потере точности решения в интервальной форме.

Рассмотрим более подробно возможность модификации метода интервального дискриминанта для обеспечения точности, характерной для графического метода.

В силу одного из свойств интервальной функции, а именно расширения интервала функции с ростом аргумента, ширина правого (большего) интервала значения корня приведенной интервальной параболы всегда больше, чем ширина ее левого (меньшего) интервала.

В соответствии с (2) правый интервал вычислим следующим образом:

$$\left[x_1\right]=\left[\frac{-b^+}{2};\ \frac{-b^-}{2}\right]+\left[\frac{\sqrt{D^-}}{2};\ \frac{\sqrt{D^+}}{2}\right], \tag{12}$$

а границы левого интервала будем искать из представления уравнения (1) в форме, полученной путем выделения полного квадрата:

$$\left(\left[x_2\right]+\frac{1}{2}\left[b\right]\right)^2-\frac{1}{4}\left[D\right]=0. \tag{13}$$

Отсюда для левого интервала справедливо равенство

$$\left[x_2^-;\ x_2^+\right]+\left[\frac{b^-}{2};\ \frac{b^+}{2}\right]=\left[\frac{-\sqrt{D^+}}{2};\ \frac{-\sqrt{D^-}}{2}\right]. \tag{14}$$

Не осуществляя перенос интервальных значений $\left[b\right]$ и $\left[D\right]$ за знак равенства, чтобы не допустить арифметического расширения интервалов, запишем уравнения для нижней границы левого интервала $\left[x_2\right]$:

$$x_2^-+\frac{b^-}{2}=\frac{-\sqrt{D^+}}{2}, \tag{15}$$

$$x_2^-=-\frac{1}{2}\left(b^-+\sqrt{D^+}\right). \tag{16}$$

Аналогично для верхней границы

$$x_2^+=-\frac{1}{2}\left(b^++\sqrt{D^-}\right). \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что вычисленный таким способом левый интервал значения корня уравнения (11) совпадает с действительным, т.е. найденным графическим методом:

$$x_2^-=-\frac{1}{2}\left(b^-+\sqrt{D^+}\right)=-\frac{1}{2}\left(-7+5.74\right)=0.63,$$

$$x_2^+=-\frac{1}{2}\left(b^++\sqrt{D^-}\right)=-\frac{1}{2}\left(-5+1\right)=2.$$

Таким образом, предложенная вычислительная модификация метода интервального дискриминанта позволяет определять не только интервалы значений корней приведенного квадратного интервального уравнения, имеющие одинаковую ширину, но и истинные границы изменения вещественных корней.

Выводы

1. Проанализированы три метода решения интервального квадратного уравнения, выявлены особенности интервальной аппроксимации корней для каждого из них.

2. Предложена система количественных оценок, позволяющих сравнивать качество аппроксимации корней, а также численно задавать желаемое качество аппроксимации в рамках конкретной практической задачи.

3. Предложена вычислительная модификация метода интервального дискриминанта, которая дает возможность аналитически определять истинные границы интервалов значений вещественных корней квадратного интервального уравнения.

Список литературы

1. Вощинин, А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы [Текст]/ А.П. Вощинин // Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68, № 1. – С. 118-126.

2. Петрикевич, Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. … канд. техн. наук. – Кемерово: КемГУ, 2006. – 225 с.

3. Вощинин, А.П. Метод анализа данных с интервальными ошибками в задачах проверки гипотез и оценивания параметров неявных линейно параметризованных функций [Текст]/ А.П. Вощинин // Заводская лаборатория. – 2000. – Т. 66, № 3.

Рецензент: док. тех. наук. проф. Зав. каф. В.П. Божко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 05.06.2013

Система кількісних оцінок локалізації коренів інтервальних полиноміальних моделей

Розглянуто методи розв’язання квадратного інтервального рівняння; запропоновано систему кількісних оцінок локалізації дійсних коренів, проілюстровану кількісним прикладом.

Ключові слова: інтервальна модель, локалізація коренів полінома, апроксимація, інтервальний дискримінант.

Quantitative evaluation system in localization of interval polynominal model roots

Methods of solution of quadratic interval equations were considered; system of quantitative evaluation of localization of actual roots illustrated by quantitative example was proposed.

Keywords: interval model, localization of polynomial roots, approximation, interval discriminant.