

## Методика определения дополнительных кромочных напряжений в полках композитного лонжерона

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Предложена методика математического моделирования кромочных эффектов в лонжероне из КМ, возникающих вследствие разности физико-механических характеристик материалов стенки и полки (коэффициентов линейного температурного расширения и Пуассона). Проведены численные исследования нормальных напряжений с помощью метода конечных элементов и дан анализ результатов сравнения с предложенной методикой.

**Ключевые слова:** композиционный материал, кромочный эффект, коэффициент линейно-температурного расширения, коэффициент Пуассона, лонжерон.

Элементы лонжерона – полки и заплечики – имеют различную структуру композиционного материала (КМ) и могут состоять из разных материалов, что приводит к разнородному поперечному сечению из-за свойственных каждому элементу физико-механических характеристик, в частности коэффициентов линейного температурного расширения и Пуассона. В то же время полки и заплечики соединены между собой, и при изгибе или температурном нагреве (охлаждении) они деформируются совместно и эти деформации не всегда соответствуют пуассоновым или температурным коэффициентам. Вследствие этого свободные деформации элементов при растяжении (сжатии) полок или изменении температуры оказываются стесненными, а значит, в полках и заплечиках возникают дополнительные напряжения.

На рис. 1 показана схема деформирования полки и заплечиков при изменении температуры на  $\Delta T$ , где под свободными (нестесненными) деформациями понимаются расширение (сужение), соответствующее собственным КЛТР материалов полок и заплечиков. Совместное деформирование приводит к появлению нормальных напряжений в элементах лонжерона и касательных – в их соединении. Переменный характер напряжений связан с тем, что границы (края) не нагружены. Совершенно аналогичное явление имеет место и вдоль лонжерона (по оси  $x$ ).

Для определения нормальных напряжений в полках и заплечиках вдали от края (затухание краевого эффекта происходит на расстоянии порядка толщины полки от края) составлены уравнения равновесия и совместности деформаций:

$$\sigma_{zn} \delta_n + \sigma_{z3} \delta_3 = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{xn} \delta_n + \sigma_{x3} \delta_3 = 0;$$

$$\varepsilon_{zn} = \varepsilon_{z3}; \quad \varepsilon_{xn} = \varepsilon_{x3}, \quad (2)$$

где в соответствии с гипотезой Дюамеля – Неймана

$$\varepsilon_{zn} = \frac{\sigma_{zn}}{E_{zn}} - \mu_{xzn} \frac{\sigma_{xn}}{E_{xn}} + \alpha_{zn} \Delta T; \quad \varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_{z3}}{E_{z3}} - \mu_{xz3} \frac{\sigma_{x3}}{E_{x3}} + \alpha_{z3} \Delta T; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{\sigma_{xn}}{E_{xn}} - \mu_{zxn} \frac{\sigma_{zn}}{E_{zn}} + \alpha_{xn} \Delta T; \quad \varepsilon_{x3} = \frac{\sigma_{x3}}{E_{x3}} - \mu_{zx3} \frac{\sigma_{z3}}{E_{z3}} + \alpha_{x3} \Delta T.$$

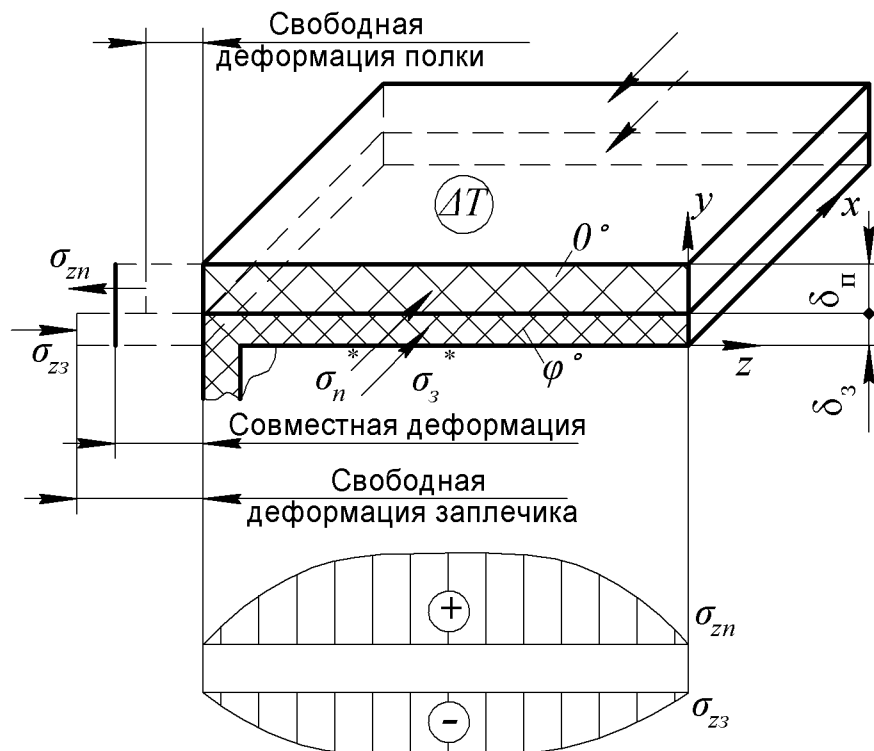


Рис. 1. Схема деформирования полки и заплечика при сжатии (растяжении) или изменении температуры

Выразив из уравнений (1) напряжения в заплечиках и подставив их в физические соотношения (3), а полученный результат – в условия совместности деформаций (2), запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{zn} a_{11} - \sigma_{xn} a_{12} &= a_{13}; \\ -\sigma_{zn} a_{21} + \sigma_{xn} a_{22} &= a_{23}. \end{aligned} \tag{4}$$

Решением этой системы уравнений относительно  $\sigma_{xn}$  и  $\sigma_{zn}$  являются формулы

$$\sigma_{xn} = \frac{a_{11} a_{23} + a_{21} a_{13}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}; \quad \sigma_{zn} = \frac{a_{22} a_{13} + a_{12} a_{23}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \tag{5}$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E_{zn}} + \frac{1}{E_{z3}} \cdot \frac{\delta_n}{\delta_3}; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\mu_{xzn}}{E_{xn}} + \frac{\delta_n}{\delta_3} \cdot \frac{\mu_{xz3}}{E_{x3}};$$

$$a_{13} = \Delta T (\alpha_{z3} - \alpha_{zn}); \quad a_{22} = \frac{1}{E_{xn}} + \frac{1}{E_{x3}} \cdot \frac{\delta_n}{\delta_3}; \tag{6}$$

$$a_{23} = \Delta T (\alpha_{x3} - \alpha_{xn}).$$

Здесь обозначено:

$\delta_n, \delta_3$  – толщина полки и заплечика, соответственно;

$E_{xn}, E_{x3}, E_{zn}, E_{z3}$  – модули упругости материала полки и заплечика по осям  $x$  и  $z$ ;

$\mu_{xzn}, \mu_{xz3}$  – коэффициенты Пуассона полки и заплечика;

$\alpha_{xn}, \alpha_{x3}, \alpha_{zn}, \alpha_{z3}$  – КЛТР материала полки и заплечика по осям  $x$  и  $z$ ;

$\Delta T$  – изменение температуры.

Определить напряжения в заплечиках можно по зависимостям

$$\sigma_{x3} = -\sigma_{xn} \frac{\delta_n}{\delta_3}; \quad \sigma_{z3} = -\sigma_{zn} \frac{\delta_n}{\delta_3}. \quad (7)$$

Таким образом, формулы (5) и (7) позволяют оценить уровень напряжений в элементах лонжерона, связанных с различием КЛТР материалов полки и заплечиков.

При растяжении (сжатии) полок лонжерона возникают пуассоновы деформации в поперечном направлении, которые, если бы полка и заплечики не были соединены друг с другом, соответствовали бы свободным (нестесненным) деформациям (см. рис. 1).

Уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид (1) и (2), а деформации определяют аналогично (3) путем замены свободной температурной деформации на пуассонову, причем только по оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zn} &= \frac{\sigma_{zn}}{E_{zn}} - \mu_{xzn} \frac{\sigma_{xn}}{E_{xn}} - \mu_{xzn} \frac{\sigma_n^*}{E_{xn}}; & \varepsilon_{z3} &= \frac{\sigma_{z3}}{E_{z3}} - \mu_{xz3} \frac{\sigma_{x3}}{E_{x3}} - \mu_{xz3} \frac{\sigma_3^*}{E_{x3}}; \\ \varepsilon_{xn} &= \frac{\sigma_{xn}}{E_{xn}} - \mu_{zxn} \frac{\sigma_{zn}}{E_{zn}}; & \varepsilon_{x3} &= \frac{\sigma_{x3}}{E_{x3}} - \mu_{zx3} \frac{\sigma_{z3}}{E_{z3}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma_n^*, \sigma_3^*$  – напряжения в полках и заплечиках от внешних нагрузок.

Система уравнений для определения  $\sigma_{xn}^*$  и  $\sigma_{zn}^*$ , ее решение и формулы для вычисления напряжений в заплечиках  $\sigma_{x3}^*$  и  $\sigma_{z3}^*$  имеют вид (4), (5) и (7) с учетом следующих выражений для коэффициентов  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_{zn}} + \frac{\delta_n}{\delta_3} \cdot \frac{1}{E_{z3}}; & a_{22} &= \frac{1}{E_{xn}} + \frac{\delta_n}{\delta_3} \cdot \frac{1}{E_{x3}}; \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{\mu_{xzn}}{E_{xn}} + \frac{\delta_n}{\delta_3} \cdot \frac{\mu_{xzn}}{E_{x3}}; & a_{13} &= \mu_{xzn} \frac{\sigma_n^*}{E_{xn}} - \mu_{xz3} \frac{\sigma_3^*}{E_{x3}}; & a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В общем случае в соответствии с основным допущением теории балок – одноплоскостным законом изменения деформаций в сечении – напряжения  $\sigma_n^*$  и  $\sigma_3^*$  переменны по толщине, но на этапе оценки уровня напряжений краевого эффекта достаточно воспользоваться их осредненными по толщине полки и заплечика значениями.

Как правило, приведенные выше зависимости дают вполне приемлемую точность для инженера-конструктора, тем более, что многие из них являются оценкой напряжений «сверху», т.е. пессимистическим прогнозом.

Полка и заплечик лонжерона из КМ находятся в условиях сложного напряженного состояния, и их проверку на прочность необходимо проводить с учетом дополнительных напряжений от температурного воздействия и разности коэффициентов Пуассона и модулей упругости.

Для апробации разработанной методики и оценки достоверности определения дополнительных напряжений, возникающих вследствие краевых эффектов, полученные с ее помощью значения напряжений, сравнивались со значениями, найденными по методу конечных элементов (МКЭ).

Расчет нормальных напряжений в полках выполняли в среде конечно-элементного анализа SolidWorks Simulation. Для проведения анализа использовали трехмерную модель участка лонжерона двутаврового сечения (рис. 2).

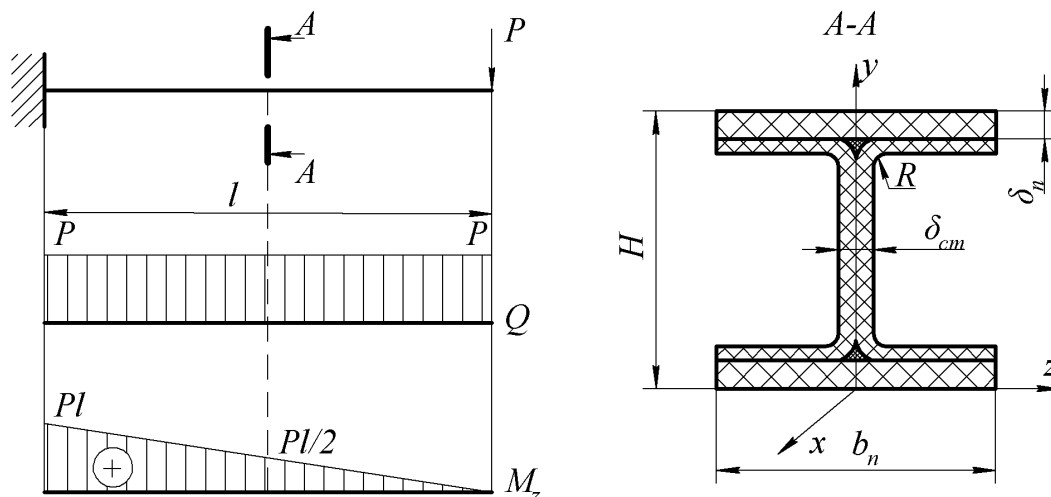


Рис. 2. Схема исследуемого лонжерона

Параметры исследуемого лонжерона:  $b_e = b_n = b_n = 100$  мм;  $\delta_e = \delta_n = \delta_n = 15$  мм;  $\delta_{cm} = 4$  мм;  $R = 2$  мм;  $l = 1$  м;  $H = 300$  мм (см. рис. 2). Физико-механические характеристики материалов полок и стенки в местных системах координат (рис. 3) представлены в табл. 1.

Исследуемый участок лонжерона был жестко закреплен по одному из торцов, а к другому прикладывали распределенную силу величиной 20 кН (см. рис. 2).

Для исключения влияния краевых эффектов длина участка лонжерона была выбрана достаточной для их затухания в среднем сечении, в котором проводили анализ касательных напряжений.

Для моделирования использовали 10-узловые тетраэдральные конечные элементы высокого порядка с квадратичной аппроксимацией перемещений (сетка высокого качества в SolidWorks Simulation). Такие конечные элементы обеспечивают более высокую точность моделирования, особенно в зонах с быстрым изменением компонентов НДС, по сравнению с элементами низкого порядка с линейной аппроксимацией перемещений.

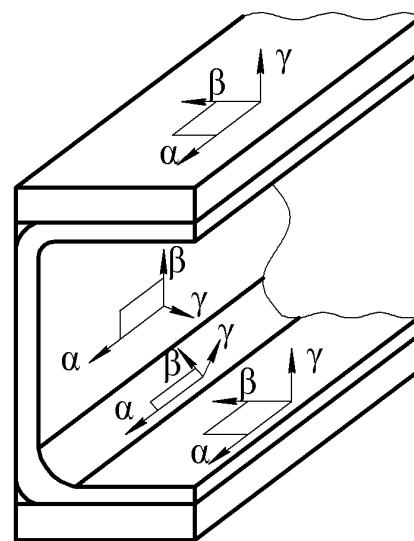


Рис. 3. Направление осей местной системы координат для полок и стенки с заплечиками

На рис. 4 и 5 показано сравнение распределения нормальных напряжений  $y_x$  и  $y_z$  без температурного воздействия на лонжерон и с ним. Сравнение значений напряжений  $y_x$ , полученных вследствие кромочных эффектов, по предложенной методике (теоретически) и МКЭ представлено в табл. 2.

Таблица 1

ФМХ материалов полок и стенки

Материал	Свойства материала								
	$E_\alpha$ , ГПа	$E_\beta$ , ГПа	$E_\gamma$ , ГПа	$G_{\alpha\beta}$ , ГПа	$G_{\alpha\gamma}$ , ГПа	$G_{\beta\gamma}$ , ГПа	$\mu_{\alpha\beta}$	$\mu_{\alpha\gamma}$	$\mu_{\beta\gamma}$
Полка	100	10	10	6	6	6	0,35	0,35	0,2
Стенка	20	20	10	26,1	6	6	0,663	0,2	0,2

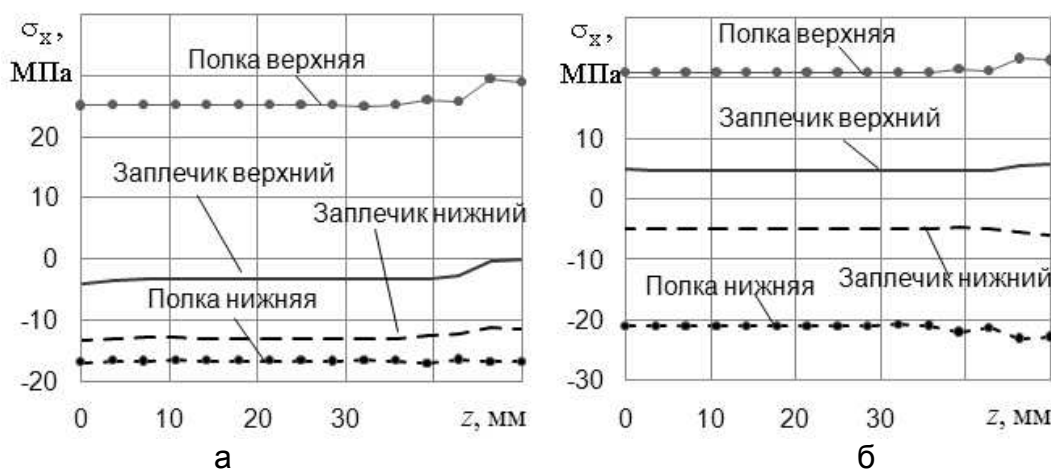


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений  $y_x$  по ширине полки (МКЭ):  
 а –  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ ; б –  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$

Результаты расчетов показывают (см. табл. 2), что нормальные напряжения в полке  $\sigma_{xn}^*$  и запечике  $\sigma_{xz}^*$ , рассчитанные по аналитической методике, удовлетворительно согласуются (различие – менее 5%) с результатами, полученными с помощью МКЭ. Показано также, что кромочные эффекты значительно влияют на значения напряжений  $\sigma_x$ , особенно в запечике, поэтому их необходимо учитывать при выполнении поверочного расчета на прочность.

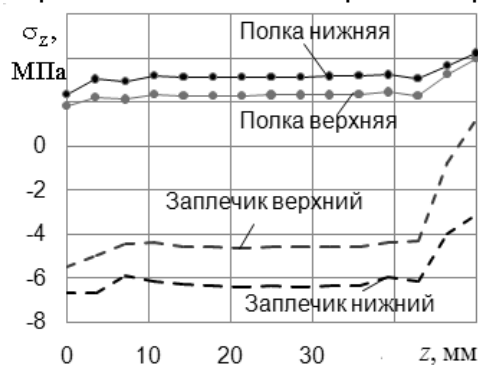


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений  $y_z$  по ширине полки (МКЭ) при  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$

Таблица 2

Нормальные напряжения  $\sigma_x$  в полках и заплечиках лонжерона с учетом кромочных эффектов

Элемент лонжерона	Без температурного воздействия, $\Delta T = 0^\circ\text{C}$		При воздействии температуры, $\Delta T = 100^\circ\text{C}$	
	$\sigma_{x0} + \sigma_x^*$ , МПа		$\sigma_{x0} + \sigma_x + \sigma_x^*$ , МПа	
	Теоретическое	МКЭ	Теоретическое	МКЭ
Полка верхняя	21,749	21,381	23,028	22,903
Полка нижняя	-21,749	-21,323	-20,47	-19,716
Заплечик верхний	7,511	7,9258	-2,081	-2,330
Заплечик нижний	-7,511	-7,928	-17,102	-17,697

Дополнительные нормальные напряжения  $\sigma_z$ , связанные с различием коэффициентов Пуассона материалов полки и заплечков, близки к нулю, а связанные с различием КЛТР – намного меньше (около 3...7 МПа), чем пределы прочности полок и заплечиков ( $F_{znp} = 64$  МПа,  $F_{znc} = 154$  МПа,  $F_{zsp} = 346$  МПа,  $F_{zsc} = 321$  МПа), поэтому их можно не принимать во внимание при выполнении поверочного расчета на прочность.

### Выводы

В работе было проведено моделирование кромочных эффектов и выведены зависимости для определения дополнительных нормальных напряжений, возникающих вдоль и поперек полок и заплечиков и связанных с различием коэффициентов Пуассона и линейного температурного расширения материалов.

Проведенные выше исследования с помощью метода конечных элементов, позволяют сделать предварительные выводы:

- напряжения  $\sigma_x$  с учетом кромочных эффектов, рассчитанные по предложенной методике, удовлетворительно согласуются (различие менее 5%) с результатами, полученными с помощью МКЭ;
- кромочные эффекты значительно влияют на значения напряжений  $\sigma_x$ , особенно в заплечике, поэтому их необходимо учитывать при выполнении поверочного расчета на прочность;
- значения напряжений  $\sigma_z$ , определенные с помощью МКЭ, малы по сравнению с пределами прочности материалов полок и заплечиков, поэтому ими можно пренебречь при выполнении поверочного расчета.

### Список литературы

1. Карпов, Я.С. Проектирование и конструктивно-технологические решения лонжеронного крыла из композиционных материалов [Текст]: учеб. пособие /

Я.С. Карпов, Ф.М. Гагауз, П. М. Гагауз. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2004. – 143 с.

2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

3. Тимошенко, С.П. Механика материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Машиностроение, 1976. – 669 с.

4. Михайлов, С.Е. О краевом эффекте в композиционных материалах [Текст] / С.Е. Михайлов // Механика композиционных материалов: науч.- теор. журнал. – Рига: Зинатне, 1981. – № 2. – С. 227 – 233.

5. Блумберг, Н.М. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композиционных материалах [Текст] / Н.М. Блумберг, В.П. Тамуж // Механика композиционных материалов: науч.- теор. журнал. – Рига: Зинатне, 1980. – № 3. – С. 424 – 435.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., зав. каф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 15.05.13

## **Методика визначення додаткових крайкових напружень в полицях композитного лонжерона**

Запропоновано методику математичного моделювання ефектів кромки в лонжероні з КМ, що виникають внаслідок різниці фізико-механічних характеристик матеріалів стінки і полиці (коефіцієнтів лінійного температурного розширення і Пуассона). Проведено числові дослідження нормальних напружень за допомогою методу скінченних елементів і дано аналіз результатів порівняння із запропонованою методикою.

**Ключові слова:** композиційний матеріал, ефект кромки, коефіцієнт лінійно-температурного розширення, коефіцієнт Пуассона, лонжерон.

## **Method for the extra edge stress determining in the composite spar caps**

The methods for mathematical modeling of the edge effects in the spar from composite, which arising due the difference between the physical and mechanical properties of the web and caps materials (coefficient of linear thermal expansion and the Poisson) has proposed. Numerical researches of the normal stress using the finite element method and an analysis of the comparison results of the proposed methodology has performed.

**Keywords:** composite material, edge effect, the coefficient of linear thermal expansion, Poisson's ratio, the spar.