УДК 519.6:517 О.С. Бичков, А.Л. Заворотний, В.С. Касьянюк

Відновлення параметрів керованого об'єкта як задача багатокритеріальної оптимізації за Парето

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У рамках парето-оптимального підходу розв`язано задачу відновлення параметрів керованого об'єкта. В результаті отримано параметричний клас парето-непокращуваних оцінок, що має континуальну потужність. Розглянуто випадки, коли модель керованого об'єкта є статичною та динамічною. Враховано, що похідні характеристик стану об`єкта можуть бути збурені похибками, що промодельовані випадковими величинами із заданими стохастичними показниками. Для випадку, коли відомі деякі параметри керованого об'єкта, наведено алгоритм вибору параметра парето-оптимізації, який би забезпечив заданий рівень достовірності оцінок.
Ключові слова: відновлення, невідомі параметри, оцінювання, система керування, Парето-оптимізація, збурені дані

Однією з найважливіших задач, що виникає в сфері розробки систем керування, є задача відновлення параметрів керованого об'єкта. Ця задача виникає в наслідок того, що не завжди розробник системи керування може вказати точні значення деяких параметрів керованого об'єкта. Замість точних значень можуть бути вказані, наприклад, допустимі діапазони цих параметрів. Але так чи інакше виникає задача встановити в ході випробувань значення даних параметрів.

Поставимо задачу аналогічно тому, як це було зроблено для задачі спостережуваності в [0]. Розглянемо систему керування деяким об'єктом, модель якого задана системою лінійних диференційних рівнянь

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \tag{1}$$

де $x = \left(x_1(t),\ldots,x_n(t)\right)^*$ − вектор дійсних функцій, що моделює характеристики стану об'єкта на інтервалі $t \in [0;T]$; тут * − символ транспонування;

$u = \left(u_1(t),\ldots,u_n(t)\right)^*$ − вектор дійсних функцій, що моделюють характеристики керування об'єктом, $t \in [0;T]$;

A та B − n-вимірні квадратні матриці, що задають модель фізичних характеристик керованого об'єкта та модель блоку керування об'єктом відповідно;

$\dot{x} = \left(\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t)\right)^*$ − вектор похідних характеристик стану об'єкта, $t \in [0;T]$.

Вважатимемо, що нам невідомі деякі елементи матриці A, тобто розглянемо задачу відновлення параметрів керованого об'єкта.

Припустимо, що відома залежність між характеристиками керування та фазовими координатами. Більш того, вважатимемо, що ця залежність лінійна і може бути задана n-вимірною квадратною матрицею C, тобто

$$u = Cx\,. \tag{2}$$

Застосуємо рівність (2) до (1). Поклавши $\overline{A} = A + BC$, перейдемо до рівняння

$$\dot{x} = \overline{A}x\,. \tag{3}$$

Як легко бачити, в (3) матриця $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \vdots & \overline{a}_{1n} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \vdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$ має невідомі елементи з такими самими індексами, як і в матриці A.

Задачу відновлення невідомих параметрів керованого об'єкта поставимо для деякого фіксованого моменту часу $\tilde{t} \in [0;T]$. В багатьох випадках похідні $\dot{x}$ можуть бути насправді невідомими. У такому разі елементи вектора похідних обчислюються за допомогою значень вектора x в моменти часу з деякого околу точки $\tilde{t}$. Відповідно, при оцінюванні $\dot{x}$ за значеннями x з околу $\tilde{t}$ отримані оцінки будуть містити похибки. Також похибки в значеннях $\dot{x}$ можуть виникнути в процесі вимірювань. Промоделюємо ці похибки, додавши в праву частину (3) випадковий вектор. В результаті для-будь якої точки $\tilde{t} \in [0;T]$ маємо рівняння системи керування, що враховує наявнять похибок в цій точці

$$\dot{x}_{\tilde{t}} = \overline{A} x_{\tilde{t}} + \xi, \tag{4}$$

де $\dot{x}_{\tilde{t}}$ та $x_{\tilde{t}}$ − значення векторів $\dot{x}$ та x в точці $\tilde{t}$;

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^*$ – випадковий вектор, реалізації якого належать до n-вимірного простору дійсних значень.

Аналогічно тому, як це було зроблено для задачі спостережуваності [0], у випадку, коли значення елементів вектора похідної $\dot{x}$ в точці $\tilde{t}$ відомі одразу, наприклад, вимірюються приладами, припускаемо, що статистичні характеристики випадкового вектора ξ (перший момент та коваріаційна матриця) відомі нам від спеціалістів предметної області. При цьому будемо розглядати випадки, типові для багатьох реальних процесів вимірювання, а саме, коли $M\xi = 0$ та коваріаційна матриця $\Re_\xi = \begin{pmatrix} M(\xi_1\xi_1) & M(\xi_1\xi_n) \\ M(\xi_n\xi_1) & M(\xi_n\xi_n) \end{pmatrix}$ – невироджена.

У випадку, коли елементи вектора похідних характеристик стану об'єкта $\dot{x}$ в точці $\tilde{t}$ – невідомі, а отже, необхідно їх оцінювати за допомогою значень елементів вектора x, будемо вважати, що елементи вектора ξ є незалежними випадковими величинами. Завдяки цьому припущенню маємо, що $\Re_\xi$ – діагональна матриця з дисперсіями випадкових елементів вектора ξ на її діагоналі $\Re_\xi = \begin{pmatrix} D\xi_1 & 0 \\ 0 & D\xi_n \end{pmatrix}$, тобто $M(\xi_i \xi_j) = \begin{cases} D\xi_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Скористаємось підходом, що описаний в [0], для того щоб отримати оцінки похідної $\dot{x}_i(\tilde{t})$ за значеннями $x_i(t)$, $1 \le i \le n$, з урахуванням математичного сподівання та дисперсії відповідної випадкової величини ξ_i, що моделює похибку цієї оцінки. До моделі системи керування в точці $\tilde{t}$ (4) застосуємо транспонування. В результаті модель системи керування (4) набуде вигляду

$$\dot{x}^*_{\tilde{t}} = x^*_{\tilde{t}} \overline{A}^* + \xi^*. \tag{5}$$

При цьому коваріаційна матриця стає числом $\Re_{\xi^*} = M(\xi^* \xi) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i > 0$.

Представимо матрицю $\overline{A}^*$ у вигляді суми двох матриць, які містять відомі та невідомі елементи матриці $\overline{A}^*$ відповідно. Отже $\overline{A}^* = \widehat{A} + \breve{A}$, де $\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \vdots & \widehat{a}_{1n} \\ \cdots & + & \cdots \\ \widehat{a}_{n1} & \vdots & \widehat{a}_{nn} \end{pmatrix}$

та $\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_{11} & \vdots & \breve{a}_{1n} \\ \cdots & + & \cdots \\ \breve{a}_{n1} & \vdots & \breve{a}_{nn} \end{pmatrix}$, елементи яких будуть мати вигляд $\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} \overline{a}_{ji}, \textit{якщо } \overline{a}_{ji} - \textit{відомий} \\ 0, \textit{в іншому випадку} \end{cases}$ та $\breve{a}_{ij} = \begin{cases} \overline{a}_{ji}, \textit{якщо } \overline{a}_{ji} - \textit{невідомий} \\ 0, \textit{в іншому віпадку} \end{cases}$ відповідно.

Тоді, позначивши $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}} = \dot{x}^*_{\tilde{t}} - x^*_{\tilde{t}}\widehat{A}$, перейдемо від розгляду всієї моделі системи керування, описаної рівнянням (5), до розгляду лише невідомої її частини

$$\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}} = x^*_{\tilde{t}}\breve{A} + \xi^* . \tag{6}$$

Для того, щоб відновити матрицю $\breve{A}$ в рівнянні (6), використаємо підхід, розроблений в [1] для більш широкого класу задач. Зазначимо, що завдяки даному підходу можна отримати не тільки оцінку матриці $\breve{A}$, а також оцінку деякого її перетворення $\widehat{\Pi\breve{A}}$, де Π − оператор Гільберта-Шмідта. Оператор Π діє у деякий гільбертів простір з $n \times n$-вимірного простору дійсних значень або ж дійсних функцій, в залежності від того, чи є матриця $\breve{A}$ стаціонарною. Зокрема, Π може бути матрицею, що забезпечує оцінку деяких параметрів блоку керування на основі параметрів керованого об'єкта, які, відповідно до постановки задачі, вважаються невідомими. Очевидно, що якщо нас цікавить відновлення самої матриці $\breve{A}$,то потрібно задати Π як тотожнє перетворення, тобто це буде одинична матриця $n \times n$ (позначимо її I).

Таким чином, для побудови оцінки $\hat{\breve{A}}$ будемо шукати перетворення B відомого вектора $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$ таке, що забезпечить оптимальну в певному розумінні оцінку шуканих параметрів керованого об'єкта $\hat{\breve{A}} = B\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$. Для цього поставимо задачу двокритеріальної мінімізації за Парето

$$\begin{cases} M\left\|B\xi^*\right\|^2 \to \min\limits_B \\ \left\|Bx^*_{\tilde{t}} - I\right\|^2 \to \min\limits_B \end{cases} . \tag{7}$$

Розв'язок задачі (7) забезпечить одночасно незменшувані значення дисперсії похибки, яка міститься в оцінці $\hat{\breve{A}}$, та операторної нев'язки, що характеризує зсув оцінки $\hat{\breve{A}}$, що отриманий внаслідок застосування шуканого перетворення B до $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$ замість застосування тотожного перетворення I до $\hat{\breve{A}}$. Відповідно до теореми, що була доведена в [1], розв'язком задачі (7) є континуум оцінок вигляду

$$B\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}} = \hat{\breve{A}} = x_{\tilde{t}}\left(x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}} + \mu\Re_{\xi^*}\right)^{-1}\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}} , \tag{8}$$

де $\mu \in (0;+\infty)$ – параметр парето-оптимізації.

Враховуючи, що в даному випадку $x_{\tilde{t}}^{*} x_{\tilde{t}} + \mu \Re_{\xi^*}$ – це число, а також те, що за побудовою $\breve{\dot{x}}_{\tilde{t}}^{*} = \dot{x}_{\tilde{t}}^{*} - x_{\tilde{t}}^{*} \widehat{A}$, можна перейти від оцінки у вигляді (8) до оцінки у вигляді $\hat{\breve{A}} = \dfrac{x_{\tilde{t}}\left(\dot{x}_{\tilde{t}}^{*} - x_{\tilde{t}}^{*}\widehat{A}\right)}{\left(x_{\tilde{t}}^{*} x_{\tilde{t}} + \mu \Re_{\xi^*}\right)}$. Звідси, нарешті, легко отримати оцінку матриці

$$\hat{A} = \widehat{A}^{*} + \frac{\left(\dot{x}_{\tilde{t}} - \widehat{A}^{*} x_{\tilde{t}}\right) x_{\tilde{t}}^{*}}{\left(x_{\tilde{t}}^{*} x_{\tilde{t}} + \mu \Re_{\xi^*}\right)} - BC, \tag{9}$$

а, отже, і її невідомих елементів.

Нагадаємо, що згідно з теоремами, доведеними в [1], критерії оптимізації задачі (7) мають протилежні тенденції при зміні параметра μ від $+0$ до $+\infty$. А саме, при зростанні параметра μ дисперсія похибки в оцінці буде зменшуватись, у той час як операторна нев’язка буде прямувати до границі, що дорівнює $\|\Pi\|^2$ (для нашого випадку – до $\|I\|^2 = 1$). Загальні принципи вибору значення параметра парето-оптимізації наведені в [2].

Відзначимо, що в рамках даного підходу оптимальність розглядається не в сенсі мінімізації похибки оцінювання, а в сенсі мінімізації двох критеріїв (7), що мають певний фізичний зміст, і мінімізація яких покращує отримані оцінки.

Для вибору параметра парето-оптимізації можна використати додаткову інформацію з матриці A. Якщо деякі елементи A відомі, то за побудовою відповідні елементи $\breve{A}$ мають дорівнювати нулю, або, що найменше, не відрізнятись від нього більше, ніж на δ, де δ − задана точність оцінювання. Нехай $\max\limits_{i,j \,|\, a_{ij} - \text{відоме}} \left| x_i(\tilde{t})\left(\dot{x}_j^{*}(\tilde{t}) - x^{*}(\tilde{t})\widehat{A}_j\right)\right| = \varepsilon$, де $\widehat{A}_j$ – це j-й стовбчик матриці $\widehat{A}$. Тоді отримаємо ще одне додаткове обмеження на значення параметра парето-оптимизації: його порібно вибирати так, щоб

$$\mu_{\tilde{t}}^{\delta} \geq max\left(+0, \frac{\varepsilon - \delta x_{\tilde{t}}^{*} x_{\tilde{t}}}{\delta \Re_{\xi^*}} \right). \tag{10}$$

Як можна легко бачити, момент часу $\tilde{t}$ міститься як параметр у всіх отриманих оцінках невідомих елементів матриці A. При постановці задачі свідомо не було зазначено, чи є матриці A та B стаціонарними. У випадку, коли хоча б одна з матриць нестаціонарна, запропонований метод без змін може бути застосований для потрібних моментів часу та забезпечить в них відновлення невідомих параметрів керованого об’єкта. Якщо ж матриці A та B є (частково) стаціонарними, то можна, задавши параметр μ, побудувати оцінки для всіх потрібних моментів часу так, щоб різниця між оцінками елементів матриці A в різні моменти часу не перевищувала б задану точність оцінювання δ.

Припустимо, що в результаті побудови оцінки $\hat{A}$ з параметром парето-оптимізації, що був обраний згідно (10), для певних моментів часу виконується нерівність

$$\max_{i,j=\overline{1,n}}\left(\max_t \hat{a}_{ij}-\min_t \hat{a}_{ij}\right)>\delta. \qquad (11)$$

Зафіксуємо індекси відповідних елементів $\hat{a}_{ij}$ матриці $\hat{A}$, які забезпечують виконання нерівності (11). Знайдемо для зафіксованого елемента $\hat{a}_{ij}$ величину $\Delta=\dfrac{\max_t \hat{a}_{ij}-\min_t \hat{a}_{ij}}{\delta}$. Завдяки Δ легко бачити, у скільки разів потрібно зменшити різницю максимального та мінімального значень елемента $\hat{a}_{ij}$ з (11), щоб вона не перевищувала δ. Вочевидь, що в даному випадку $\Delta>1$. Таким чином, якщо для кожного моменту часу обрати нове значення параметра парето-оптимізації, що задовольняє нерівності

$$\bar{\mu}_{\tilde{t}}^{\delta}\geq\frac{(\Delta-1)x_{\tilde{t}}^{*}x_{\tilde{t}}}{\Re_{\xi^{*}}}+\mu_{\tilde{t}}^{\delta}\Delta,$$

та знову побудувати оцінку матриці $\hat{A}$, то з формули (9) видно, що всі різниці $\max_t \hat{a}_{ij}-\min_t \hat{a}_{ij}$ для будь-яких елементів $\hat{a}_{ij}$ зменшаться в Δ разів, а, отже, не будуть превищувати δ. Необхідно зазначити, що може і не виникнути необхідність перераховувати оцінку $\hat{A}$ для всіх зазначених моментів часу. Можна перерахувати оцінку тільки для тих моментів часу, які дають максимальне значення різниці (11). Потім необхідно повторювати процедуру коректування значення параметра μ_t^{δ} в моменти часу з максимальною різницею (11), поки не отримаємо для всіх моментів часу такі оцінки $\hat{A}$, що $\max_{i,j=\overline{1,n}}\left(\max_t \hat{a}_{ij}-\min_t \hat{a}_{ij}\right)\leq\delta$. Проте тотальна зміна значення параметра парето-оптимізації на $\bar{\mu}_{\tilde{t}}^{\delta}$ одразу гарантує без додаткових перевірок, що $\max_t \hat{a}_{ij}-\min_t \hat{a}_{ij}$ для будь-яких елементів $\hat{a}_{ij}$ не перевищить δ.

Легко бачити, що викладений метод може бути природним чином поширений на системи керування, модель яких описується більш загальним лінійним операторним рівнянням

$$y=Ax+Bu,$$

де $y=(y_1(t),\ldots,y_n(t))^{*}$ – відомий вектор, що є відгуком від системи керування.

Запропонований в даній статті метод розв'язування задачі відновлення параметрів керованого об'єкта на відміну від традиційного підходу дозволяє врахувати наявність похибок в значеннях похідних характеристик стану керованого об'єкта (або ж наявність похибок у відгуку від системи керування). Дана ситуація часто зустрічається в реальних задачах. Запропонований метод може знайти широке застосування, оскільки він дозволяє побудувати оцінки невідомих параметрів керованого об'єкта як у випадку стаціонарної, так і для нестаціонарної систем керування. Крім того, він може бути поширений на системи керування, що описані лінійними операторними рівняннями.

Список литературы

1. Бичков, О.С. Застосування парето-оптимального підходу для розв'язання задачі спостережуваності [Текст] / О.С. Бичков, А.Л. Заворотний, В.С. Касьянюк – сб. науч. тр. нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии». – Х., – ХАИ, – 2010, Вып. 47, С. 34-41

1. Заворотний, А.Л. Розв`язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації [Текст] / А.Л. Заворотний // Вісник Київ. ун-ту. Серія Фіз.-мат. Науки. – 2004. – № 3. – С. 198-205.

2. Белов, Ю.А. Парето-оптимальная редукция в линейных системах со случайными погрешностями. [Текст] / Ю.А. Белов, В.С. Касьянюк // сб. докл. на расширенном заседании семинара института прикладной математики им. И.Н. Векуа. – Тбилиси: изд-во Тбилис. ун-та. – 1989. Т. 4, №3.– С. 21-24.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафеди Ю.А. Бєлов, Київ. національний університет імені Тараса Шевченка, Київ**.**

Поступила в редакцию 1.08.12

Обновление параметров управляемого объекта как задача многокритериальной оптимизации по Парето

В рамках парето-оптимального подхода решена задача восстановления параметров управляемого объекта. В результате получен параметрический класс парето-неулучшаемых оценок, который имеет континуальную мощность. Рассмотрены случаи, когда модель управляемого объекта является статической и динамической. Учтено, что производные характеристик состояния объекта могут быть искажены погрешностями, промоделированными случайными величинами с заданными стохастическими показателями. Для случая, когда известны некоторые параметры управляемого объекта, приведен алгоритм выбора параметра парето-оптимизации, который бы обеспечил заданный уровень достоверности оценок.

Ключевые слова: восстановление, неизвестные параметры, оценивание, система управления, Парето-оптимизация, зашумленные данные

Change of controllable object parameters as a multicriteria optimization problem according to Paretto

Within the pareto-optimum approach the controlled system's parameters recovery problem is resolved. As a result parametrical class of estimates is obtained. None of estimates from the class can be improved in terms of pareto-optimization. Both dynamic and static controlled system's models are observed. It's taken into account that derivative of object's state characteristics vector could be perturbed. Error part of derivative values is modeled with variates. Variates possess given stochastic characteristics. An approach to select a value of pareto-optimum parameter is presented for the case of partially known controlled system's parameters. The approach provides estimate of given level of reliability.

Keywords: reconstruction, unknown parameters, estimation, control system, pareto-optimization, perturbed data