УДК 311.214

Н.В. Руденко

Оценка точности функций случайных величин

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрен случай, когда **Z** – функция только одной величины **A** и когда **Z** – функция двух переменных **A** и **B.** На основании этого предложены правила определения окончательной ошибки. Эта величина представляет собой наилучшую оценку среднеквадратичного отклонения для распределения результатов, которые должны получаться при многократном повторении эксперимента с одними и теми же или сходными приборами. Таким образом, она служит мерой общей воспроизводимости результата.

Ключевые слова: эксперимент, точность измерения, ошибка измерения, среднеквадратичная ошибка, распределение результатов.

Введение

Измеряя какую-нибудь физическую величину, мы не рассчитываем получить ее истинное значение. Поэтому необходимо как-то указать, насколько полученный результат может быть близким к истинному значению, иными словами, указати, какова точность измерения. Для этого вместе с полученными данными указывают приближенную ошибку измерения.

Оценивать ошибки необходимо потому, что, не зная, каковы они, нельзя сделать определенных выводов из эксперимента. Если опыт ставится для проверки теории, то экспериментатор должен представить себе, какова должна быть точность, чтобы имело смысл сравнивать результаты с теоретическими выводами. Таким образом, не только знание ошибки позволяет делать определенные выводы на основании экспериментальных данных, но и, наоборот, задачами эксперимента часто определяется максимальная допустимая ошибка, что в свою очередь может оказать влияние на выбор методики. Важно планировать и проводить эксперимент так, чтобы точность окончательного результата соответствовала его цели.

Требования соответствующей точности относится не только к окончательному результату опыта, но и к различным величинам, измеряемым в ходе всего эксперимента. При этом ошибка окончательного результата определяется ошибками первоначальных величин. Понятие ошибки измерения играет далеко не второстепенную роль в эксперименте. Наоборот, оно имеет прямое отношение к таким вопросам, как цель эксперимента, его метод и значимость его результатов.

Постановка задачи и цель исследования

В большинстве экспериментов интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо этого мы измеряем некоторые другие величины A, B, C и т.д., а затем вычисляем величину Z, которая является известной функцией указанных первичных величин. Например, измерить плотность d некоторого материала можно, измерив массу прямоугольного бруска M и его размеры l_x, l_y, l_z. Функциональная связь между искомой величиной d и первичными величинами M, l_x, l_y, l_z имеет вид

$$d = \frac{M}{l_x l_y l_z}. \qquad (1)$$

Допустим, что каждая первичная величина измерена несколько раз. В таком случае, скажем, для $\boldsymbol{A}$ мы найдем наилучшее значение $\bar{A}$, то есть среднее из измеренных значений, и оценку его среднеквадратичной ошибки $\boldsymbol{\Delta A}$ ($\boldsymbol{\sigma_m}$). Аналогичным образом найдем $\bar{B}$ и $\boldsymbol{\Delta B}$. Предположим, что измерения первичных величин независимы и поэтому их ошибки также независимы. Это значит, например, что в том случае, когда $\bar{A}$ велико, величина $\bar{B}$ с равной вероятностью может быть и большой, и малой.

Зная величины $\boldsymbol{A} = \bar{A}$, $\boldsymbol{B} = \bar{B}$ и т.д., можно вычислить оптимальное значение величины $\boldsymbol{Z}$. Задача заключается в том, чтобы, зная среднеквадратичные ошибки $\boldsymbol{\Delta A}$, $\boldsymbol{\Delta B}$ и т.д., вычислить среднеквадратичную ошибку $\boldsymbol{\Delta Z}$ величины $\boldsymbol{Z}$.

Решение проблемы

Рассмотрим сначала случай, когда $\boldsymbol{Z}$ – функция только одной величины $\boldsymbol{A}$, например, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^2$ или $\boldsymbol{Z} = \ln \boldsymbol{A}$. В общем виде запишем это так:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{A}). \qquad (2)$$

Если истинное значение первичной величины есть $\boldsymbol{A_0}$, то истинное значение величины $\boldsymbol{Z}$ есть

$$\boldsymbol{Z_0} = \mathrm{Z}(\boldsymbol{A_0}). \qquad (3)$$

Графически это представлено на рис. 1.

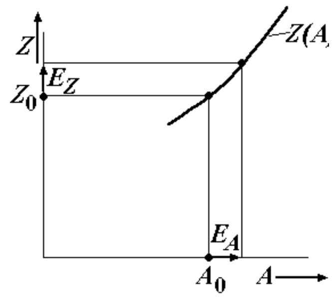

Рис.1. Ошибка $\boldsymbol{E_Z}$ в величине $\boldsymbol{Z}$, обусловленная ошибкой $\boldsymbol{E_A}$ в величине $\boldsymbol{A}$

Ошибка данного значения $\boldsymbol{A}$ равна

$$\boldsymbol{E_A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A_0}, \qquad (4)$$

и ей соответствует ошибка в величине $\boldsymbol{Z}$, равная

$$\boldsymbol{E_Z} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{E_A}) - \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{A_0}); \qquad (5)$$

$$E_Z \approx \frac{dZ}{dA} E_A. \qquad (6)$$

Производная $\boldsymbol{dZ/dA}$ взята в точке $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0}$. Знак приближенного равенства в формуле (6) связан с предположением, что ошибка $\boldsymbol{A}$ достаточно мала и в интервале измеренных значений $\boldsymbol{A}$ функцию $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{A})$ можно представить прямой линией. Таким образом, ошибка в величине $\boldsymbol{Z}$ пропорциональна ошибке в величине $\boldsymbol{A}$, причем коэффициент пропорциональности равен

$$C_A = \left(\frac{dZ}{dA}\right)_{A=A_0}. \tag{7}$$

Теперь допустим, что величина $\boldsymbol{A}$ изменяется в соответствии со своим распределением относительно $\overline{A}$, и возьмем среднее квадратичное от обеих частей равенства (6). В результате получим

$$\Delta Z = C_A \cdot \Delta A. \tag{8}$$

Отметим один важный случай, когда $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{n}$, так что $\boldsymbol{C_A} = \boldsymbol{nA}^{n-1}$. В этом случае

$$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}, \tag{9}$$

т.е. относительная среднеквадратичная ошибка в величине $\boldsymbol{Z}$ в $\boldsymbol{n}$ раз больше относительной среднеквадратичной ошибки в величине $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{Z}$ – функция двух переменных $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$Z = Z(A,B). \tag{10}$$

Ошибки в величинах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ таковы:

$$E_A = A - A_0,\ E_B = B - B_0, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A_0}$ и $\boldsymbol{B_0}$ – истинные значения величин $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Как и в предыдущем случае, предполагается, что в пределах измеренных значений $\boldsymbol{Z}$ можно приближенно считать линейной функцией $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда ошибка в величине $\boldsymbol{Z}$ равна

$$E_Z = C_A Z_A + C_B Z_B, \tag{12}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{C_A}$ и $\boldsymbol{C_B}$ представлены выражениями

$$C_A = \frac{\partial Z}{\partial A},\ C_B = \frac{\partial Z}{\partial B}. \tag{13}$$

Эти частные производные вычисляются в точках $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0}$.

Из равенства (12) следует, что

$$E_Z^2 = C_A^2 E_A^2 + C_B^2 E_B^2 + 2C_A C_B E_A E_B. \tag{14}$$

Усредним обе части этого равенства по парам значений $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ из соответствующих им распределений.

Поскольку величины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ предполагаются независимыми, средние произведения $\boldsymbol{E_A E_B}$ равны нулю.

По определению

$$(\Delta Z)^2 = \langle E_Z^2 \rangle,\ (\Delta A)^2 = \langle E_A^2 \rangle,\ (\Delta B)^2 = \langle E_B^2 \rangle. \tag{15}$$

Следовательно,

$$(\Delta Z)^2 = C_A^2 (\Delta A)^2 + C_B^2 (\Delta B)^2. \tag{16}$$

Теперь можно установить общее правило. Пусть $\boldsymbol{Z}$ – известная функция переменных $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и т.д. Пусть среднеквадратичная ошибка в величине $\boldsymbol{A}$ равна $\Delta\boldsymbol{A}$ и т.д. Тогда среднеквадратичная ошибка $\Delta\boldsymbol{Z}$ в величине $\boldsymbol{Z}$ имеет вид

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 + (\Delta Z_C)^2 + \ldots, \qquad (17)$$

где

$$\Delta Z_A = \left(\frac{\partial Z}{\partial A}\right)\Delta A \ . \qquad (18)$$

Выражения для $\Delta\boldsymbol{Z}$ в ряде конкретных случаев приведены в табл. 1.

Таблица 1

Операции над ошибками

Функциональная связь между Z, A и B	Соотношение между среднеквадратичными ошибками
$Z = A + B$ $Z = A - B$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$ (I)
$Z = AB$ $Z = A/B$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$ (II)
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$ (III)
$Z = \ln A$	$\Delta Z = \frac{\Delta A}{A}$ (IV)
$Z = e^A$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \Delta A$ (V)

Заключение

Все существенные ошибки объединяют согласно правилам табл. 1 и получают окончательную ошибку. Эта величина представляет собой наилучшую оценку среднеквадратичного отклонения для распределения результатов, которые должны получаться при многократном повторении эксперимента с одними и теми же или сходными приборами. Таким образом, она служит мерой общей воспроизводимости результата.

Принято указывать не относительную (в процентах), а абсолютную ошибку окончательного результата. Окончательное значение измеренной величины и ее ошибку следует проводить с одинаковым числом десятичных знаков, имеющим реальный смысл. Как правило, ошибку приводят с одной значащей цифрой, но если это 1 или 2, то можно привести и вторую значащую цифру. Из того, что нам не требуется оценивать окончательную ошибку точнее, следует, что и все вычисления ошибок нужно проводить только с одной или, самое большое, двумя значащими цифрами.

Список литературы

1. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы планирования эксперимента [Текст] / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1981. – 520 с.

2. Козлов, А.В. Основы научных исследований: учеб. пособие [Текст] / А.В. Козлов, Б.А. Решетников, С.В. Сергеев. – Челябинск: Изд-во. ЧГТУ, 1997.–

218 с.

3. Костюк, Г.І. Основы научных исследований в области робототехнических систем и комплексов: учеб. пособие [Текст] / Г.И. Костюк, Н.В. Руденко, В.А. Фадеев. – Х. Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2007. – 221 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Долматов,
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Поступила в редакцию 21.07.12.

Оцінювання точності функцій випадкових величин

Розглянуто випадок, коли ***Z*** – функція тільки однієї величини ***A*** і коли Z – функція двох величин ***A*** і ***B***. На підставі цього запропоновано правила визначення остаточної помилки. Ця величина являє собою кращу оцінку середньоквадратичного відхилення для розподілу результатів, які мають виходити при багаторазовому повторенні експерименту з одними і тими або схожими приладами. Таким чином, вона є мірою загальної відтворюваності результату.

***Ключові слова*:** експеримент, точність вимірювання, помилка вимірювання, середньоквадратична помилка, розподіл результатів.

The estimation of functions of random variables

In the work we consider the case where ***Z*** is a function of only one variable ***A*** and when ***Z*** is a function of two variables ***A*** and ***B***. On the basis of this proposed rules determine the final error. This value is the best estimate of standard deviation for the distribution of the results to be obtained with repeated the experiment with the same or similar instruments. Thus, it is a measure of the total reproducibility of the results.

Keywords: experiment, the accuracy of the measurement, the measurement error, the mean squared error, the distribution of the results.