УДК 539.3

А.И. Соловьев, А.В. Головченко

О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен аналитический метод решения краевых задач теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и эллиптической систем координат. Он основан на специальном преобразовании общих решений уравнений равновесия двумерных задач теории упругости для ортотропных тел, позволяющем выразить эти решения через две гармонические функции, каждая из которых связана с определенной системой координат. Параметры, определяющие эллиптическую границу, выбраны так, чтобы граничные координатные линии введенных эллиптических систем координат совпадали. Полученные общие решения краевых задач в виде суперпозиции двух частных решений уравнений равновесия в сочетании с классическим и обобщенным методами Фурье позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для ортотропных пластин. Дано точное решение первой краевой задачи для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, в частности конечным прямолинейным разрезом.

Ключевые слова: анизотропия, пластина, равновесие, уравнение, эллипс, координата, коэффициент.

Введение

Тонкостенные элементы конструкций (пластины, оболочки), применяемые в технике, в большинстве случаев анизотропны естественно или конструктивно. Они широко применяются в самолетостроении, ракетостроении, кораблестроении и т.д. Используемые при этом материалы, как правило, содержат полости, трещины, включения и другие дефекты структуры. Такие дефекты неизбежно либо возникают при изготовлении материалов и изделий, либо образуются в них в процессе эксплуатации под воздействием нагрузок или внешней среды. Влияние этих факторов способствует постепенному развитию дефектов, которые со временем могут привести к исчерпанию возможностей конструкций. В связи с этим изучение поведения анизотропных элементов конструкций при различных условиях нагружения, в частности анализ напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений, является особенно актуальным.

Решение соответствующих задач теории упругости связано с существенными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений представляет собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных, часто в сочетании с непростой геометрий исходной области.

Предлагаемый в работе аналитический подход к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин непосредственно связан с математической проблемой расчета ответственных конструкций летательных аппаратов, которые должны обладать прочностной надежностью при наличии в материале и элементах конструкций исходных или появляющихся в процессе эксплуатации дефектов. Этот подход основан на построении новых общих решений уравнений равновесия и применении классического и обобщенного методов Фурье.

1. Построение общих решений уравнений равновесия

Однородные уравнения равновесия тонких упругих пластин в случае двумерных задач статической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - компоненты тензора напряжений.

Деформированное состояние пластины определяется тремя компонентами тензора деформаций, которые при малых деформациях выражаются через проекции вектора перемещений $\vec{u}=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y$ по формулам

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y=\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}. \qquad (2)$$

Компоненты тензора деформаций не являются независимыми, а должны удовлетворять условиям совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Полная система уравнений для определения напряжений и деформаций получается, если к уравнениям равновесия (1) и формулам (2) добавить уравнения обобщенного закона Гука. Для ортотропной пластины они имеют вид [1,2]

$$\varepsilon_x=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y, \ \varepsilon_y=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y, \ \gamma_{xy}=a_{66}\tau_{xy}, \qquad (4)$$

где a_{ij} - упругие постоянные (коэффициенты деформации). Через технические постоянные $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$ величины a_{ij} выражаются по формулам

$$a_{11}=\frac{1}{E_1}, \ a_{22}=\frac{1}{E_2}, \ a_{66}=\frac{1}{G_{12}}, \ a_{12}=-\frac{\nu_{12}}{E_1}=-\frac{\nu_{21}}{E_2}, \ E_1\nu_{21}=E_2\nu_{12}, \qquad (5)$$

где $E_1=E_x$; $E_2=E_y$ - модули продольной упругости в направлении осей Ox, Oy (модули Юнга); $G_{12}=G_{xy}$ - модуль сдвига в плоскости Oxy; $\nu_{12}=\nu_{xy}$, $\nu_{21}=\nu_{yx}$ - коэффициенты Пуассона.

Из соотношений (4), (5) следует, что

$$\sigma_x=\bar{a}_{11}\varepsilon_x+\bar{a}_{12}\varepsilon_y, \ \sigma_y=\bar{a}_{12}\varepsilon_x+\bar{a}_{22}\varepsilon_y, \ \tau_{xy}=G_{12}\gamma_{xy};$$

$$\bar{a}_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \ \bar{a}_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \ \bar{a}_{12}=\frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=\frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}. \qquad (6)$$

Подстановка напряжений (6) в уравнения (1) с учетом соотношений (2) приводит к уравнениям равновесия ортотропной пластины в перемещениях:

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\left(\bar{a}_{12}+G_{12}\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}+G_{12}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0;$$

$$\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\left(\bar{a}_{12}+G_{12}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+G_{12}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}=0. \qquad (7)$$

Решение системы уравнений (7) можно представить в виде [3]

$$u_x=-\left(\bar{a}_{12}+G_{12}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\partial y},\quad u_y=\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+G_{12}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad (8)$$

где функция $\Phi=\Phi(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}+\left(\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{12}\right)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}=0. \qquad (9)$$

В случае изотропной пластины $E_1=E_2=E$, $\nu_{12}=\nu_{21}=\nu$, $G_{12}=G=$ $=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, и тогда уравнение (9) является бигармоническим уравнением.

На основании формул (2), (6), (8) напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} выражаются через функцию напряжений $\Phi(x,y)$ следующим образом:

$$\sigma_x=G_{12}\left(-\bar{a}_{11}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2\partial y}+\bar{a}_{12}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}\right),\ \tau_{xy}=G_{12}\left(\bar{a}_{11}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}-\bar{a}_{12}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x\partial y^2}\right);$$

$$\sigma_y=\left[\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}-\bar{a}_{12}\left(\bar{a}_{12}+G_{12}\right)\right]\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2\partial y}+\bar{a}_{22}G_{12}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}. \qquad (10)$$

Применение формул (8), (10) не вызывает затруднений при решении краевых задач для пластин, ограниченных координатными линиями декартовой системы координат Oxy. Однако они не пригодны для получения аналитических решений в случае пластин, ограниченных координатными линиями криволинейной системы координат. Это обстоятельство связано с нахождением производных различного порядка от функции $\Phi(x,y)$ по криволинейным координатам, что приводит к появлению различных степеней коэффициентов Ламе в знаменателях выражений для перемещений (8) и напряжений (10). Поэтому точное удовлетворение граничным условиям краевых задач сопряжено со значительными трудностями или вообще невозможно на основе прямого применения представлений (8), (10).

Предлагается следующий вариант преодоления указанных трудностей. Вначале вместо (8), (10) получим более простые представления для перемещений и напряжений. С этой целью введем безразмерные величины δ_1, δ_2 $\left(\delta_j>0, j=1,2\right)$ по формулам

$$\delta_1^2+\delta_2^2=\omega=\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{12},\quad \delta_1^2\delta_2^2=\lambda=\frac{E_1}{E_2},\quad \omega^2-4\lambda\geq 0,\ \omega>0\ ,$$

откуда в силу симметрии этих формул относительно δ_1, δ_2 имеем

$$\delta_1=\sqrt{\frac{\omega+\sqrt{\omega^2-4\lambda}}{2}}\,,\qquad \delta_2=\sqrt{\frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4\lambda}}{2}}$$

либо $\delta_1=\sqrt{\frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4\lambda}}{2}}$, $\delta_2=\sqrt{\frac{\omega+\sqrt{\omega^2-4\lambda}}{2}}$.

Теперь уравнение (9) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\delta_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\delta_1{}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\delta_1{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\delta_2{}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)=0. \tag{11}$$

Вместо переменной y и функции $\Phi=\Phi(x,y)$ введем переменные y_j и функции $\Phi_j=\Phi_j\left(x,y_j\right)$, $j=1,2$ по формулам $y_j=\delta_j y$, $\Phi_j\left(x,y_j\right)=\Phi\left(x,\frac{y_j}{\delta_j}\right)$.

Уравнение (11) при такой замене распадается на два уравнения:

$$\left(\delta_j^2\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\delta_{3-j}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y_j^2}\right)=0\quad (j=1,2). \tag{12}$$

Если в качестве $\Phi_j\left(x,y_j\right)$ выбрать гармонические функции переменных x,y_j, то они будут удовлетворять уравнениям (9), (11), (12). При $\delta_1\neq\delta_2$ $\left(\omega^2\neq 4\lambda\right)$ представление решений уравнений (1), (7) является общим (функции Φ_j линейно независимы). В случае $\delta_1=\delta_2=\delta$ $\left(\omega^2=4\lambda\right)$ функции Φ_1, Φ_2 образуют линейно зависимую систему, и тогда надо либо построить решение уравнений (1), (7), не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью функции Φ_1), либо в исходной краевой задаче $\left(\delta_1\neq\delta_2\right)$ осуществить предельный переход $\left(\delta_1\to\delta_2=\delta\right)$.

Преобразуем формулы (10) для напряжений с учетом того, что гармонические функции $\Phi_j\left(x,y_j\right)=\Phi\left(x,\frac{y_j}{\delta_j}\right)$ переменных x, $y_j=\delta_j y$ ($j=1,2$) удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению (9). Так как $\Delta\Phi_j=\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y_j^2}=0$, то $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y_j^2}=-\frac{1}{\delta_j^2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y^2}=-\delta_j^2\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}$ и, следовательно, $\tau_{xy}^{(j)}=-\frac{G_{12}}{\delta_j^2}\left(\bar{a}_{11}+\delta_j^2\bar{a}_{12}\right)\frac{\partial^3\Phi_j}{\partial x\partial y^2}$, $\sigma_x^{(j)}=-G_{12}\left(\bar{a}_{11}+\delta_j^2\bar{a}_{12}\right)\frac{\partial^3\Phi_j}{\partial x^2\partial y}$,

$\sigma_y^{(j)} = \left[\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\left(\bar{a}_{12} + G_{12}\right) - \delta_j^2 \bar{a}_{22} G_{12}\right] \dfrac{\partial^3 \Phi_j}{\partial x^2 \partial y}$. Поскольку $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} \dfrac{E_1}{E_2 \nu_{12}}$,

$\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\left(\bar{a}_{12} + G_{12}\right) = \bar{a}_{22} G_{12} \left(\dfrac{E_1}{G_{12}} - \nu_{12}\right)$, $\dfrac{E_1}{E_2} = \delta_1^2 \delta_2^2$, $\dfrac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} = \delta_1^2 + \delta_2^2$,

$\bar{a}_{22} = \dfrac{\bar{a}_{12}}{\nu_{12}}$, то

$$\tau_{xy}^{(j)} = -r_{12}\delta_j^{-2}\left(\delta_1^2\delta_2^2 + \delta_j^2 \nu_{12}\right)\frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial x \partial y^2},\ \sigma_x^{(j)} = -r_{12}\left(\delta_1^2\delta_2^2 + \delta_j^2 \nu_{12}\right)\frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\sigma_y^{(j)} = r_{12}\left(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_j^2 + \nu_{12}\right)\frac{\partial^3 \Phi_j}{\partial x^2 \partial y},\ r_{12} = \frac{G_{12}\bar{a}_{12}}{\nu_{12}}. \qquad (13)$$

При этом $\sigma_x^{(j)} + \delta_j^2 \sigma_y^{(j)} = r_{12}\left(\delta_j^2 - \delta_2^2\right)\left(\delta_1^2 - \delta_j^2\right)\dfrac{\partial^3 \Phi_j}{\partial x^2 \partial y} \equiv 0 \quad (j = 1,2)$, т.е.

$$\sigma_x^{(j)} = -\delta_j^2 \sigma_y^{(j)} \quad \left(\sigma_y^{(j)} = -\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)}\right). \qquad (14)$$

Положим

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y} = \frac{\delta_j a}{r_{12}\gamma_j} I_j,\ I_j = I_j\left(x, y_j\right),\ \gamma_j = \delta_1^2\delta_2^2 + \delta_j^2 \nu_{12} \quad (j = 1,2), \qquad (15)$$

где a - параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. Так как $\Phi_j = \Phi_j\left(x, y_j\right)$ - гармонические функции переменных x, y_j, то $I_j = I_j\left(x, y_j\right)$ - также гармонические функции этих переменных. На основании (13) – (15) получаем простые по структуре представления для напряжений:

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial y},\ \sigma_x^{(j)} = -a\delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x},\ \sigma_y^{(j)} = -\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)} \quad (j = 1,2). \qquad (16)$$

Аналогичное преобразование формул (8) приводит к следующим выражениям для перемещений:

$$u_x^{(j)} = -\frac{a\left(\delta_j^2 + \nu_{12}\right)}{\delta_j E_1} I_j,\ u_y^{(j)} = \frac{a\delta_j\left(\delta_{3-j}^2 + \nu_{12}\right)}{E_1}\int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy \quad (j = 1,2). \qquad (17)$$

Общие решения уравнений равновесия (1), (7) на основании представлений (16), (17) имеют вид

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)},\ u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)},\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)},$$

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)},\ \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}.$$

Эти решения в сочетании с методом Фурье позволяют получить простые выражения для проекций вектора перемещений и вектора напряжений на границе ортотропной эллиптической пластины и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач в предположении, что оси анизотропии пластины совпадают с ее осями симметрии.

2. Общие решения уравнений равновесия ортотропных эллиптических пластин

Пусть $<x,y>$, $<\xi,\theta>$ - исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x = ach\xi\cos\theta,\ y = ash\xi\sin\theta \quad \left(0 \le \xi < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi\right). \tag{18}$$

Уравнение $\xi = \xi_0 = const$ определяет эллипс

$$\frac{x^2}{\left(ach\xi_0\right)^2} + \frac{y^2}{\left(ash\xi_0\right)^2} = 1. \tag{19}$$

Коэффициенты Ламе эллиптической системы координат имеют вид $H_\xi = H_\theta = ah$, $h = h(\xi,\theta) = \sqrt{ch^2\xi - cos^2\theta}$.

Считая $\delta_1 \ne \delta_2$, выберем для каждой из гармонических функций I_j ($j = 1{,}2$) свою эллиптическую систему координат

$$<\xi_j,\theta_j>: x_j = a_j ch\xi_j\cos\theta_j, y_j = a_j sh\xi_j\sin\theta_j \quad \left(0 \le \xi_j < \infty, 0 \le \theta_j \le 2\pi\right),$$

а соответствующие декартовы системы координат $<x_j,y_j>$ свяжем с исходной декартовой системой координат $<x,y>$ равенствами

$$x_j = x, y_j = \delta_j y \quad \left(j = 1{,}2\right). \tag{20}$$

Уравнение $\xi_j = \xi_{j_0} = const$ определяет эллипс

$$\frac{x_j^2}{\left(a_j ch\xi_{j0}\right)^2} + \frac{y_j^2}{\left(a_j sh\xi_{j0}\right)^2} = \frac{x^2}{\left(a_j ch\xi_{j0}\right)^2} + \frac{\left(\delta_j y\right)^2}{\left(a_j sh\xi_{j0}\right)^2} = 1 \quad (j = 1{,}2). \tag{21}$$

Уравнения (21) задают исходный эллипс (19), если

$$a_j ch\xi_{j0} = ach\xi_0,\ a_j sh\xi_{j0} = \delta_j ash\xi_0 \quad (j = 1{,}2). \tag{22}$$

Тогда из соотношений (18), (20), (22) следует, что на эллипсах $\xi_j = \xi_{j_0}$, $\xi = \xi_0$ (границе эллиптической пластины) выполняются равенства

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \tag{23}$$

Равенства (23) позволяют представить проекции вектора перемещений $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y$ и вектора напряжений $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$ на границе $\xi = \xi_0$ эллиптической пластинки $0 \le \xi \le \xi_0$ $\left(\xi_0 \le \xi < \infty\right)$ в форме ряда Фурье по полной системе функций $\{1, cos\,n\theta, sin\,n\theta\}$ $(n = 1,2,...)$ и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач.

Коэффициенты Ламе эллиптических систем координат $<\xi_j,\theta_j>$ имеют вид

$$H_{\xi j}=H_{\theta j}=a_j h_j\,,\quad h_j=h_j\left(\xi_j,\theta_j\right)=\sqrt{ch^2\xi_j-cos^2\theta_j}\quad (j=1{,}2),$$

а направляющие косинусы $n_x, n_y, n_x^{(j)}, n_y^{(j)}$ единичных внешних нормалей $\vec{n}=n_x\vec{e}_x+n_y\vec{e}_y$, $\vec{n}_j=n_x^{(j)}\vec{e}_x+n_y^{(j)}\vec{e}_y$ к эллипсам $\xi=\xi_0$, $\xi_j=\xi_{j0}$ определяются по формулам

$$n_x=\pm\frac{sh\xi_0\,cos\,\theta}{h_0},\quad n_y=\pm\frac{ch\xi_0\,sin\,\theta}{h_0},\quad n_x^{(j)}=\pm\frac{sh\xi_{j0}\,cos\,\theta_j}{\delta_j H_{j0}},\quad n_y^{(j)}=\pm\frac{ch\xi_{j0}\,sin\,\theta_j}{H_{j0}};$$

$$h_0=h\left(\xi_0,\theta\right)=\sqrt{ch^2\xi_0-cos^2\theta},\quad H_{j0}=\sqrt{\left(\frac{sh\xi\, j_0}{\delta_j}\right)^2 cos^2\theta_j+ch^2\xi\, j_0\, sin^2\theta_j}\,.$$

На основании равенств (22), (23) имеем $a_1H_{10}=a_2H_{20}=ah_0$ и

$$n_x^{(1)}=n_x^{(2)}=n_x=\pm\frac{sh\xi_0\,cos\,\theta}{h_0},\quad n_y^{(1)}=n_y^{(2)}=n_y=\pm\frac{ch\xi_0\,sin\,\theta}{h_0}. \qquad (24)$$

Знак «+» («-») соответствует внутренним (внешним) краевым задачам для области $0\le\xi\le\xi_0$ $\left(\xi_0\le\xi<\infty\right)$.

Если на границе $\xi=\xi_0$ задан вектор напряжений $\vec{F}=F_x\vec{e}_x+F_y\vec{e}_y$, то его проекции F_x, F_y на оси декартовой системы координат $<x,y>$ выражаются по формулам

$$F_x=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y\,,\quad F_y=\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y\,.$$

Определим на границах $\xi_j=\xi_{j0}$ проекции $F_x^{(j)}=\sigma_x^{(j)}n_x^{(j)}+\tau_{xy}^{(j)}n_y^{(j)}$, $F_y^{(j)}=\tau_{xy}^{(j)}n_x^{(j)}+\sigma_y^{(j)}n_y^{(j)}$ векторов напряжений, соответствующих частным решениям (16) уравнений равновесия (1). Используя равенства (22) – (24) и выражения для частных производных введенных гармонических функций I_j $(j=1{,}2)$

$$\frac{\partial I_j}{\partial x}=\frac{1}{a_j h_j^2}\left(sh\xi_j\,cos\,\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j}-ch\xi_j\,sin\,\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}\right),$$

$$\frac{\partial I_j}{\partial y}=\frac{\delta_j}{a_j h_j^2}\left(ch\xi_j\,sin\,\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j}+sh\xi_j\,cos\,\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}\right), \qquad (25)$$

получаем простые формулы на границах $\xi_j=\xi_{j0}$ $(j=1{,}2)$

$$F_x^{(j)}=\mp\frac{1}{h_0}\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j},\quad F_y^{(j)}=\mp\frac{1}{\delta_j h_0}\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}. \qquad (26)$$

Таким образом, общие решения краевых задач для эллиптических пластин $0 \le \xi \le \xi_0$, $\xi_0 \le \xi < \infty$ и вектор напряжений $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ на границе $\xi = \xi_0$ согласно представлениям (16), (17), (26) выражаются через гармонические функции эллиптических координат $I_j = I_j\left(\xi_j, \theta_j\right)$, $(j = 1{,}2)$ и их частные производные первого порядка по этим координатам в виде:

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)},\ u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)},\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)};$$

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)},\ \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)};$$

$$F_{x|\xi=\xi_0} = F^{(1)}_{x|\xi_1=\xi_{10}} + F^{(2)}_{x|\xi_2=\xi_{20}},\ F_{y|\xi=\xi_0} = F^{(1)}_{y|\xi_1=\xi_{10}} + F^{(2)}_{y|\xi_2=\xi_{20}}. \quad (27)$$

В качестве **примера** рассмотрим задачу о равновесии неограниченной ортотропной пластины $\xi_0 \le \xi < \infty$, граница которой подвержена действию равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности $\sigma_0 = const$, $\sigma_0 > 0$, т.е.

$$\vec{F}_{|\xi=\xi_0} = -\sigma_0 \vec{n} = \sigma_0 h_0^{-1}\left(sh\xi_0 \cos\theta \vec{e}_x + ch\xi_0 \sin\theta \vec{e}_y\right). \quad (28)$$

На основании формул (26) – (28) граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial I_1}{\partial \xi_1}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + \frac{\partial I_2}{\partial \xi_2}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}} = \sigma_0 sh\xi_0 \cos\theta,$$

$$\frac{1}{\delta_1}\frac{\partial I_1}{\partial \theta_1}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + \frac{1}{\delta_2}\frac{\partial I_2}{\partial \theta_2}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}} = \sigma_0 ch\xi_0 \sin\theta, \quad (29)$$

где $0 \le \theta \le \pi/2$ в силу симметрии задачи по координатам x, y.

Гармонические функции I_j, обладающие указанной симметрией и исчезающие на бесконечности, таковы:

$$I_j = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)} e^{-(2k+1)\xi_j} \cos(2k+1)\theta_j \quad (j = 1{,}2). \quad (30)$$

Удовлетворяя граничным условиям (29) с помощью гармонических функций (30), получаем точные значения коэффициентов $A_k^{(j)}$:

$$A_0^{(1)} = \frac{\delta_1\sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} e^{\xi_{10}}\left(\delta_2 ch\xi_0 - sh\xi_0\right),\ A_0^{(2)} = -\frac{\delta_2\sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} e^{\xi_{20}}\left(\delta_1 ch\xi_0 - sh\xi_0\right),$$

$$A_k^{(j)} = 0,\ k = 1{,}2...,\ j = 1{,}2. \quad (31)$$

Следовательно, гармонические функции I_j при данных граничных условиях выражаются элементарными функциями

$$I_j = (-1)^{j+1}\frac{\delta_j\sigma_0}{\delta_1 - \delta_2}\left(\delta_{3-j} ch\xi_0 - sh\xi_0\right) e^{-\left(\xi_j - \xi_{j0}\right)} \cos\theta_j. \quad (32)$$

Вычислим напряжения $\sigma_{y|\theta=0}$ $\left(\theta=0:y=0,x>ach\xi_0\right)$. В силу равенств (16), (25) находим последовательно

$$\sigma^{(j)}_{y|\theta=0}=\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial x}|_{\theta_j=0}=\frac{a}{\delta_j a_j sh\xi_j}\frac{\partial I_j}{\partial \xi_j}|_{\theta_j=0}=-\frac{a}{\delta_j a_j sh\xi_j}A_0^{(j)}e^{-\xi_j},$$

$$\sigma_{y|\theta=0}=\sigma^{(1)}_{y|\theta_1=0}+\sigma^{(2)}_{y|\theta_2=0}=-a\left[A_0^{(1)}\frac{e^{-\xi_1}}{\delta_1 a_1 sh\xi_1}+A_0^{(2)}\frac{e^{-\xi_2}}{\delta_2 a_2 sh\xi_2}\right].$$

С учетом выражений (31) получаем

$$\sigma_{y|\theta=0}=\frac{\sigma_0 a}{\delta_1-\delta_2}\left[\frac{e^{-(\xi_2-\xi_{20})}\left(\delta_1 ch\xi_0-sh\xi_0\right)}{a_2 sh\xi_2}-\frac{e^{-(\xi_1-\xi_{10})}\left(\delta_2 ch\xi_0-sh\xi_0\right)}{a_1 sh\xi_1}\right]. \quad (33)$$

Входящие в (33) величины $e^{\xi_{j0}}$, $e^{-\xi_j}$, $sh\xi_j$, a_j выражаются через параметры a, ξ_0 и координату ξ исходной эллиптической системы координат (18):

$$a_j=a\sqrt{ch^2\xi_0-\delta_j^2 sh^2\xi_0}, \qquad a_j e^{\xi_{j0}}=a\left(ch\xi_0+\delta_j sh\xi_0\right),$$

$$e^{-\xi_j}=\frac{a_j}{ach\xi+\sqrt{a^2ch^2\xi-a_j^2}}, \qquad a_j sh\xi_j=\sqrt{a^2ch^2\xi-a_j^2}.$$

Предельный переход $\delta_1\to\delta_2=\delta$ в (33) дает значение

$$\sigma_{y|\theta=0}=a\sigma_0\left[\frac{ch2\xi_0-\delta sh2\xi_0}{a\left(ch\xi_0-\delta sh\xi_0\right)^2}\left(\frac{ach\xi}{a_2 sh\xi_2}-1\right)+\frac{\delta a^2\left(\delta ch\xi_0-sh\xi_0\right)sh^2\xi_0 ch\xi}{a_2^3\left(ch\xi_0-\delta sh\xi_0\right)sh^3\xi_2}\right].$$

Для изотропной пластины $\xi_0\le\xi<\infty$, $\delta_1=\delta_2=\delta=1$

$$\sigma_{y|\theta=0}=\sigma_0\left(\frac{e^{-\xi}}{sh\xi}+\frac{sh^2\xi_0 ch\xi}{sh^3\xi}\right).$$

В предельном случае $\xi_0=0$ $\left(\xi_{j0}=0\right)$ эллипсы $\xi=\xi_0,\xi_j=\xi_{j0}\,(j=1,2)$ вырождаются в один и тот же отрезок $y=0,-a\le x\le a$, а исходная задача трансформируется в задачу о равновесии ортотропной плоскости, ослабленной разрезом (трещиной) $y=\pm0,-a<x<a$. При этом все формулы существенно упрощаются и принимают вид: $a_1=a_2=a$, $A_0^{(1)}=\frac{\delta_1\delta_2\sigma_0}{\delta_1-\delta_2}$, $A_0^{(2)}=-\frac{\delta_1\delta_2\sigma_0}{\delta_1-\delta_2}$,

$\xi_1=\xi_2=\xi$ при $\theta=0\left(y=0,a<x<\infty\right)$, $\sigma_{y|\theta=0}=\frac{\sigma_0 e^{-\xi}}{sh\xi}$, $\sigma_{x|\theta=0}=\delta_1\delta_2\frac{\sigma_0 e^{-\xi}}{sh\xi}$.

В декартовых переменных x,y

$$\sigma_{y|y=0,x>a} = \frac{\sigma_0 a^2}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\sqrt{x^2-a^2}}, \qquad \sigma_{x|y=0,x>a} = \delta_1\delta_2\sigma_{y|y=0,x>a}.$$

Соотношения между гармоническими функциями в декартовых $< x_j, y_j >$ и эллиптических $< \xi_j, \theta_j >$ координатах:

$$e^{-n\xi_j} e^{\pm in\theta_j} = n(\pm i)^n \int_0^\infty \lambda^{-1} J_n\left(a_j\lambda\right) e^{-\lambda y_j} e^{\mp\lambda x_j} d\lambda \quad (n=1,2,...),$$

$$e^{\pm\lambda y_j} e^{i\lambda x_j} = \sum_{k=0}^{\infty} i^n J_n\left(a_j\lambda\right) chn\left(\xi_j \mp i\theta_j\right),$$

где $J_n\left(a_j\lambda\right)$- функции Бесселя первого рода, позволяют исследовать краевые задачи для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и эллиптической систем координат. Эти соотношения являются простой модификацией формул разложения гармонических функций [4] на случай ортотропных пластин. Их использование обеспечивает точное удовлетворение граничным условиям основных краевых задач для ортотропной полосы и ортотропной полуплоскости, ослабленных эллиптическим отверстием, в частности продольной трещиной.

Список литературы

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Подильчук, Ю.Н. Граничные задачи статики упругих тел [Текст] / Ю.Н. Подильчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 304 с.
3. Гузь, А.Н. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел [Текст] / А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. Проценко, В.С. Некоторые соотношения между решениями уравнений Ламе в декартовых, параболических и эллиптических координатах [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 4. – С. 37– 40.

Рецензент: д.т.н., профессор М.Л. Угрюмов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 29.02.12

Про сумісне застосування декартових та еліптичних координат до розв’язання крайових задач теорії пружності для ортотропних пластин

Запропоновано аналітичний метод розв’язання крайових задач теорії пружності для ортотропних пластин, обмежених координатними лініями декартової і еліптичної систем координат. Спеціальні перетворення загальних розв’язків рівнянь рівноваги двовимірних задач теорії пружності для ортотропних тіл дозволяють записати ці розв’язки через дві гармонічні функції, кожну з яких задано в одній з систем координат. Параметри, які визначають еліптичну межу, вибрано так, щоб граничні координатні лінії заданих еліптичних систем координат збігалися. Отримано загальні розв’язки крайових задач у вигляді суперпозиції двох частинних розв’язків рівнянь рівноваги. Класичний та узагальнений методи Фур’є дозволяють точно задовольнити граничні умови основних крайових задач для ортотропних пластин. Отримано точний розв’язок першої крайової задачі для необмеженої ортотропної пластини, яка ослаблена еліптичним отвором, зокрема скінченним прямолінійнм розрізом.

Ключові слова: анізотропія, пластина, рівновага, рівняння, еліпс, координата, коефіцієнт.

On the joint applying of the Cartesian and elliptic coordinates for solving the boundary-value problems of elasticity theory for orthotropic plates

Analytical method of solving the boundary-value problems of theory of elasticity for orthotropic plates limited by coordinate curves of Cartesian and elliptic coordinate systems is suggested. It is based on a specific transformation of general solutions of the equilibrium equations of two-dimensional problems of elasticity theory for orthotropic bodies enabling to express these solutions via two harmonic functions each of which is connected to a particular coordinate system. Parameters defining elliptic boundary are selected so that boundary coordinate curves of introduced elliptic coordinate systems coincide. Obtained boundary-value problems general solutions in terms of superposition of two particular solutions of equilibrium equations, together with the classical and generalized Fourier method, enable to accurately meet boundary conditions of the principal boundary-value problems for orthotropic plates. The exact solution of the first boundary-value problem for unbounded orthotropic plate weakened by elliptic hole, specifically finite rectilinear cut, is given.

Keywords: anisotropy, plate, equilibrium, equation, ellipse, coordinate, coefficient.