УДК 516:621.01
А. К. Шапошников

Математическая модель эвольвентной поверхности

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Получены уравнения эвольвентной поверхности и построена её математическая модель. Класс поверхностей, к которому принадлежат полученные уравнения, обладает свойством замкнутости относительно операции построения эквидистанты. Это позволяет при необходимости довольно просто (аналитическим преобразованием) строить эквидистантную поверхность.
Ключевые слова: математическая модель, поверхность, эквидистанта, эвольвентная поверхность.

Математическая модель изделия на производстве выполнена в виде чертежа, описанного на языке начертательной геометрии со специальными символами для предоставления всей нужной (в том числе и технологической) информации участникам производственного процесса. Появление изделий со сложнофасонными формами привело к необходимости использования языков аналитической и сплайновой геометрий, которые широко распространены в CAD/CAM системах и оборудовании с ЧПУ на машиностроительных предприятиях [1].

Однако для описания объектов механического производства желательно, чтобы геометрия обладала свойством замкнутости относительно операции построения эквидистанты. В этом случае эквидистантная поверхность к исходной может быть получена аналитически.

В работах [2, 3] описаны математическая и компьютерная модели эвольвентной сплайновой планиметрии, с помощью которых предлагается описывать объекты производства. Класс функций, к которому принадлежат уравнения эвольвентной сплайновой планиметрии, обладает свойством замкнутости относительно операции построения эквидистанты, что позволяет при необходимости довольно просто (аналитическим преобразованием) строить эквидистанту и траекторию движения центра фрезы, которая обеспечит заданную форму детали [4, 5].

Под эвольвентной поверхностью будем понимать поверхность, которая получена в результате движения эвольвенты окружности, центр которой движется по образующей кривой. Образующая представляет собой эвольвенту к окружности. Для построения эвольвентной поверхности необходимо построить эвольвенту окружности экваториальной плоскости тора, а затем – эвольвенту образующей окружности тора. Тор – поверхность вращения, полученная в результате вращения образующей окружности (окружности экваториальной плоскости тора) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности (осевой окружности тора) (рис.1).

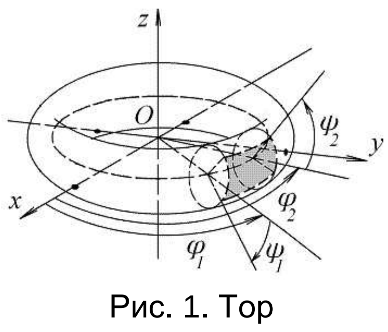

Рис. 1. Тор

Для плоской кривой место центров кривизны, место центров соприкасающихся окружностей и огибающая нормалей дают одну и ту же кривую, которая названа эволютой. В случае пространственной кривой место центров кривизны и место соприкасающихся окружностей совпадают, а главные нормали не имеют огибающей. Однако можно искать огибающую других нормалей кривой: в каждой точке пространственной кривой выбирают нормаль так, чтобы она касались некоторой новой кривой (эволюты). Эвольвентами данной кривой являются такие кривые, ортогональные к касательным данной кривой [6, 7].

В данной работе будет рассмотрен случай, когда эвольвента лежит в одной плоскости с эволютой. Целью данной работы является построение математической модели эвольвентной поверхности.

Рассмотрим двумерный тор

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi; \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi; \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$

и образующую окружность

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi; \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi. \end{cases}$$

Пусть начало декартовых координат находится в центре эволюты – образующей окружности (рис. 2).

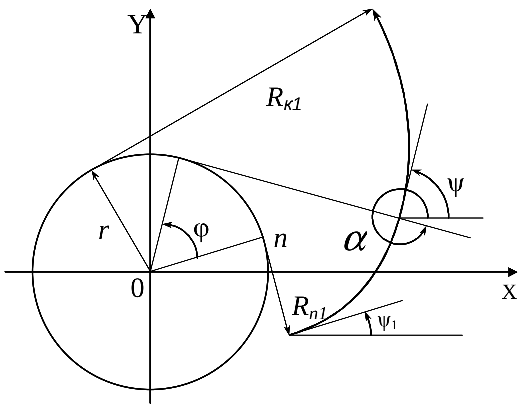

Рис. 2. Дуга эвольвенты образующей окружности:

ψ – приращение текущего угла эволюты образующей окружности; ψ_0 – начальный угол эволюты окружности экваториальной плоскости тора; R – радиус осевой окружности тора; r – радиус окружности экваториальной плоскости тора

Уравнение эволюты имеет вид

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos(\psi + \psi_0); \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin(\psi + \psi_0). \end{cases}$$

За положительное направление принимаем направление движения против часовой стрелки, тогда

$$\psi = \frac{s_{eo}}{R + r\cos\varphi}\operatorname{sign}(R + r\cos\varphi),$$

где s_{eo} – длина эвольвенты к образующей окружности; R – радиус эвольвенты к образующей окружности.

Знаки начального R_{n1} и конечного R_{k1} радиусов равны между собой. Однако при равенстве нулю одного из них. Следует брать знак другого радиуса, поскольку оба равны нулю быть не могут. Обозначив $\psi_{11} = \psi + \psi_0$, а знак радиуса эвольвенты – $k_{eo} = sign(R+rcos\varphi)$, имеем

$$\psi = k_{eo}\frac{s_{eo}}{R + r\cos\varphi}.$$

Начальный угол эволюты (окружности экваториальной плоскости тора) ψ_0 зависит от приращения начального и конечного радиусов кривизны эвольвенты:

$$i_{eo} = \operatorname{sign}\left(|R_{k1}| - |R_{n1}|\right),\quad \psi_{01} = \varphi_0 + (1 - i_{eo})\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Направление касательного луча α в точке $s(\psi_{11})$ зависит и от i_{eo} , и от k_{eo}:

$$\alpha = \psi_{11} - i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Уравнение эвольвенты в тех же координатах

$$\begin{cases} U = x + (R + r\cos\varphi)\cdot\cos\alpha, \\ V = y - (R + r\cos\varphi)\cdot\sin\alpha, \end{cases}$$

где $R + r\cos\varphi = |R_{n1}| + i_{eo}\cdot s_{eo} + r\cos\varphi$.

Выражая $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через ψ_{11}, i_{eo} и k_{eo} , получаем:

$$\cos\alpha = \cos\left(\psi_{11} - i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\psi_{11}\right) = i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\sin\psi_{11},$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\psi_{11} - i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\psi_{11}\right) = -i_{eo}\cdot k_{eo}\cdot\cos\psi_{11}$$

Подставив выражения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в уравнение эвольвенты, имеем

$$\begin{cases} U = (R + r\cos\varphi)\cdot\cos\psi_{11} + k_{eo}\cdot\left(i_{eo}\cdot|R_{n1}| + s_{eo} + i_{eo} r\cos\varphi\right)\cdot\sin\psi_{11}, \\ V = (R + r\cos\varphi)\cdot\sin\psi_{11} - k_{eo}\cdot\left(i_{eo}\cdot|R_{n1}| + s_{eo} + i_{eo} r\cos\varphi\right)\cdot\cos\psi_{11}. \end{cases}$$

Передвинем дугу в точку (x_0, y_0) и повернем на заданный угол $\psi_1 = \psi_0$ получим уравнение эвольвенты окружности экваториальной плоскости тора имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cdot\cos\psi_{11} + k_{eo}\cdot\left(i_{eo}\cdot\left(|R_{n1}| + r\cos\varphi\right) + s_{eo}\right)\cdot\sin\psi_{11} \\ (R + r\cos\varphi)\cdot\sin\psi_{11} - k_{eo}\cdot\left(i_{eo}\cdot\left(|R_{n1}| + r\cos\varphi\right) + s_{eo}\right)\cdot\cos\psi_{11} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} (R+r\cos\varphi)\cdot\cos\psi_{01}+k_{eo}\cdot i_{eo}\cdot(|R_{n1}|+r\cos\varphi)\cdot\sin\psi_{01} \\ (R+r\cos\varphi)\cdot\sin\psi_{01}-k_{eo}i_{eo}\cdot(|R_{n1}|+r\cos\varphi)\cdot\cos\psi_{01} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

Найдем зависимость длины дуги эволюты экваториальной окружности тора s_{eo} от длины дуги эвольвенты l_1 (рис. 3).

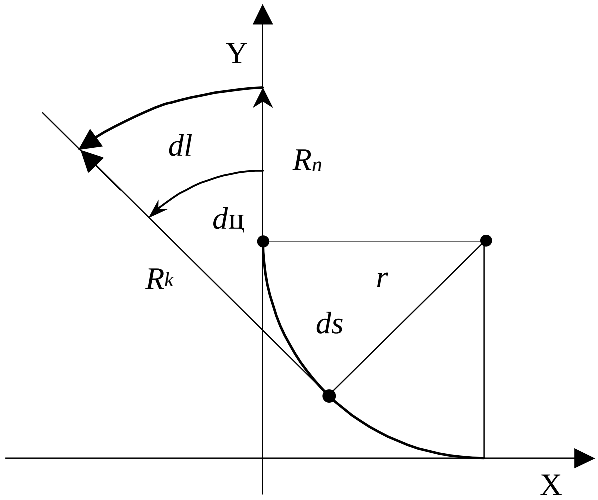

Рис. 3. Зависимость дифференциала дуги эволюты ds от длины дуги эвольвенты dl

Из свойств эволюты известно, что длина дуги эволюты равна приращению радиуса кривизны эвольвенты: $s_{eo} = |R_{k1} - R_{n1}|$. В рассматриваемом случае s_{eo} определяется как $s_{eo} = r\cdot(\varphi_k - \varphi_0)$ и $s_{eo} = r\cdot\varphi$, а $ds = r\cdot d\varphi$, $(R_n\cdot d\varphi < dl < R_k\ d\varphi)$. Поскольку приращение радиуса кривизны эвольвенты есть бесконечно малая величина $R_{k1} - R_{n1} = ds$ и $R_{k1}d\varphi - dsd\varphi < dl < R_{k1}d\varphi$, то с точностью до бесконечно малых второго порядка получаем

$$dl_1 = R_{k1}\cdot d\varphi = (s_{eo}+R_{n1})\frac{ds}{R+r\cos\varphi} = \frac{R_{n1}+s_{eo}}{R+r\cos\varphi}ds,$$

$$l_1 = \int_0^s \frac{R_{n1}+s_{eo}}{R+r\cos\varphi}ds = \frac{R_{n1}s_{eo}}{R+r\cos\varphi}+\frac{s_{eo}^2}{2(R+r\cos\varphi)}.$$

Из последнего выражения легко получить зависимость текущей длины эволюты s_{eo} от текущей длины эвольвенты l_1

$$s_{eo} = -R_{n1} \pm \sqrt{R_{n1}^2 - 2l_1(R+r\cos\varphi)},$$

Аналогично определим связь радиуса осевой окружности тора R, длиной дуги l_1, начальным R_{n1} и конечным R_{k1} радиусами кривизны дуги эвольвенты окружности экваториальной плоскости тора

$$l_1 = \frac{R_{n1}(R_{k1}-R_{n1})}{R}+\frac{(R_{k1}-R_{n1})^2}{2R} = \frac{R_{k1}^2-R_{n1}^2}{2R},$$

Из последнего выражения находим радиус эволюты

$$R = \frac{R_{k1}^2 - R_{n1}^2}{2L_1}$$

Следовательно, уравнение эвольвенты окружности экваториальной плоскости тора имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\psi_{11} + k_{eo}\left(i_{eo} \cdot (|R_{n1}| + r\cos\varphi) - R_{n1} \pm \sqrt{R_{n1}^2 - 2l_1(R + r\cos\varphi)}\right)\sin\psi_{11} \\ (R + r\cos\varphi)\sin\psi_{11} - k_{eo}\left(i_{eo} \cdot (|R_{n1}| + r\cos\varphi) - R_{n1} \pm \sqrt{R_{n1}^2 - 2l_1(R + r\cos\varphi)}\right)\cos\psi_{11} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\psi_{01} + k_{eo} i_{eo}(|R_{n1}| + r\cos\varphi)\sin\psi_{01} \\ (R + r\cos\varphi)\sin\psi_{01} - k_{eo} i_{eo}(|R_{n1}| + r\cos\varphi)\cos\psi_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично построим эвольвенту осевой окружности тора, которая будет задаваться уравнением:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\psi_{12} + k_{22}\left(i_2 \cdot |R_{n2}| - R_{n2} \pm \sqrt{R_{n2}^2 - 2l_2 r}\right)\sin\psi_{12} \\ r\sin\psi_{12} - k_{22}\left(i_2 \cdot |R_{n2}| - R_{n2} \pm \sqrt{R_{n2}^2 - 2l_1 r}\right)\cos\psi_{12} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} r\cos\psi_{02} + k_{22} i_2 \cdot |R_{n2}|\sin\psi_{02} \\ r\sin\psi_{02} - k_{22} i_{\cdot 2}|R_{n2}|\cos\psi_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

где R_{n1} – начальный и R_{k1} – конечный радиусы кривизны; $k_{22} = sign(r);$ $i_2 = \operatorname{sign}\left(|R_{k2}| - |R_{n2}|\right)$; $r = \dfrac{R_{k_2}^2 - R_{n_2}^2}{2L_2}$; $\psi_{02} = \phi_0 + (1 - i_{eo}) \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Введем обозначения

$$A(l_2) = r\cos\phi = r\cos\psi_{12} + k_{22}\left(i_2 \cdot |R_{n2}| - R_{n2} \pm \sqrt{R_{n2}^2 - 2l_2 r}\right)\sin\psi_{12} -$$

$$- r\cos\psi_{02} + k_{22} i_2 \cdot |R_{n2}|\sin\psi_{02} + x_0 .$$

Подставляя полученные уравнения образующей окружности и окружности, вокруг которой вращается образующая окружность, получаем уравнение эвольвентной поверхности:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + A(l_2))\cos\psi_{11} + k_{eo}\left(i_{eo} \cdot (|R_{n1}| + A(l_2)) - R_{n1} \pm \sqrt{R_{n1}^2 - 2l_1(R + A(l_2))}\right)\sin\psi_{11} \\ (R + A(l_2))\sin\psi_{11} - k_{eo}\left(i_{eo} \cdot (|R_{n1}| + A(l_2)) - R_{n1} \pm \sqrt{R_{n1}^2 - 2l_1(R + A(l_2))}\right)\cos\psi_{11} \\ r\sin\psi_{12} - k_{22}\left(i_2 \cdot |R_{n2}| - R_{n2} \pm \sqrt{R_{n2}^2 - 2l_1 r}\right)\cos\psi_{12} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} (R+A(l_2))\cos\psi_{01}+k_{eo}i_{eo}(|R_{n1}|+A(l_2))\sin\psi_{01} \\ (R+A(l_2))\sin\psi_{01}-k_{eo}i_{eo}(|R_{n1}|+A(l_2))\cos\psi_{01} \\ r\sin\psi_{02}-k_{22}i_{\cdot 2}|R_{n2}|\cos\psi_{02} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, построена математическая модель эвольвентной поверхности, которая однозначно представима в виде 11-параметрического семейства параметров (табл.1). Параметры эвольвентной поверхности приведены табл.2.

Таблица 1– Параметры модели лоскута эвольвентной поверхности

Длина дуги		Начальная точка и угол					Радиус кривизны			
							начала	конца	начала	конца
L_1	L_2	x_0	y_0	z_0	ψ_{11}	ψ_{12}	R_{n1}	R_{k1}	R_{n2}	R_{k2}

Пример лоскута эвольвентной поверхности тора показан на (рис.4)

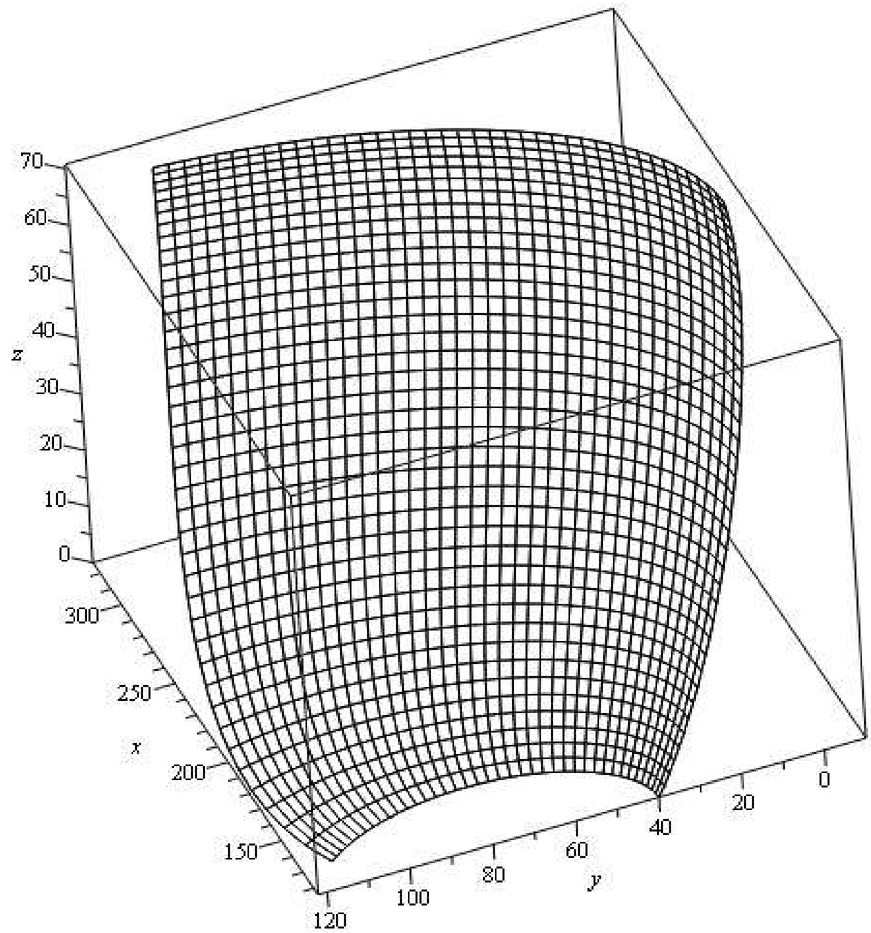

Рис. 4. Эвольвентная поверхность тора

Таблица 2– Параметры лоскута эвольвентной поверхности

Длина дуги		Начальная точка и угол					Радиус кривизны			
							начала	конца	начала	конца
100	*100*	*100*	*100*	*100*	*0*	*0*	*30*	*50*	*40*	*60*

Данные результаты используются для решения задач формообразования в машиностроении.

Список литературы

1. Бычков И. В. Описание объекта производства для корректной постановки задачи формообразования / И. В. Бычков // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 45. – Х., 2010. - С. 129–135.

2. Бут Е.Н. Компьютерная сплайновая планиметрия. Определения и проблемы / Е.Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 24. – Х., 2001. - С. 236–246.

3. Бут Е.Н. Математическая модель фигуры в эвольвентной сплайновой геометрии / Е.Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 14. – Х., 2002. - С. 25–31.

4. Шапошников А.К. Построение эквидистантного контура к контуру, описанному эвольвентным сплайном. / А. К. Шапошников // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 42. – Х., 2009. - С. 152–158.

5. Шапошников А.К. Построение эквидистантного контура к контуру, описанному эвольвентным сплайном. / А. К. Шапошников // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 45. – Х., 2010. - С. 116–121.

6. Дубровин Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко – 2-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. –760 с.

7. Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия / С. С. Бюшгенс – 2-е изд., испр. М.: КомКнига, 2006. – 304 с.

Рецензент: д.т.н., проф., с.н.с. Ю. А. Раисов
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Поступила в редакцию: 02.06.2011

Математична модель евольвентної поверхні

Побудовано рівняння для поверхонь у евольвентній сплайновій геометрії. Клас поверхонь, до якого належать ці рівняння, замкнені відносно операції побудови еквідістанти, за необхідності це дозволяє просто (аналітичним перетворенням) будувати еквідистантну поверхню.

Ключові слова: математична модель, поверхня, еквідистанта, евольвента, лоскут поверхні.

Mathematics model of involute surface

In this paper is given the equation of surface in involute spline geometry. The class of surfaces, which describe by this equation, is reserved by operation of building the equidistant. The equidistant surface to the basic surface, which describe by equation of involute spline geometry, is building by analytically transformations of parameters of model.

Keywords: mathematics model, surface, equidistant surface, involute, spline surface.