УДК 311: 62; 65 Н. Ю. Ламнауэр

Распределения самых точных изделий для различных квалитетов точности изготовления

Украинской инженерно-педагогической академии

Получены распределения случайной величины ближайших размеров к номинальным размерам и их числовые характеристики для изделий с различными квалитетами точности изготовления. Показано, что эти размеры имеют малую ошибку отклонений и могут быть использованы для получения качественных изделий.
Ключевые слова: точность, качество, распределение, числовые характеристики.

Введение. Так как для различных квалитетов точности изготовления изделий в машиностроении применяются три закона распределения величин размеров [1], то рассмотрим для этих законов метод выбора качественных изделий, найдём их распределение и числовые характеристики.

Для распределений вида $F\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$, где a- параметр сдвига, а β масштабный параметр такие числовые характеристики как математическое ожидание и дисперсия случайной величины могут быть вычислены по нормированному распределению. В нормированном распределении $a=0$ и $\beta=1$. Для этого вида распределений дисперсия получает множитель β^2 по сравнению с нормированным распределением, а математическое ожидание определяется по формуле $a+\beta\mu$, где μ - математическое ожидание нормированного распределения. Поэтому некоторые расчёты для математического ожидания и дисперсии будем производить по нормированному распределению.

Будем считать, что для симметричных распределений номинальный размер находится в точке симметрии. В нашем случае все эти три закона распределения величин размеров изделий симметричны. Решим для них задачу нахождения распределения величин размеров ближайших к номинальному размеру и найдём их числовые характеристики, если произведена выборка объёмом r.

Если случайная величина размера X имеет функцию плотности $f(x)$, то распределение величины ближайшей к номинальному размеру a, есть первая порядковая статистика модуля случайной величины $\left|X-a\right|$.

Нормальный закон распределения размеров изделий. Для нормального распределения, которое применимо для квалитетов точности с девятого и больше [1], с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left((x-a)^2/2\sigma^2\right)$$

плотность распределения случайной величины $Z=\left|X-a\right|$ имеет вид

$$\varphi(z)=\begin{cases} 0 & при \quad z\le 0; \\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(z^2/2\sigma^2\right) & при \quad z>0 \end{cases},$$

а функцию распределения

$$\psi(z)=\begin{cases} 0 & при \quad z\le 0; \\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt & при \quad z>0. \end{cases}$$

Функция плотности первой порядковой статистики для случайной величины $Z=\left|X-a\right|$ имеет вид

$$g(z_{(1)})=r[1-\psi(z)]^{r-1}\varphi(z). \tag{1}$$

Найдём математическое ожидание первой порядковой статистики нормированной случайной величины Z для нормального закона распределения. Имеем

$$\mu\left(Z_{(1)}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^r r\int\limits_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int\limits_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{r-1}dx.$$

Отсюда математическое ожидание ближайшего размера к номинальному размеру имеет вид

$$M\left(Z_{(1)}\right)=\sigma\mu\left(Z_{(1)}\right)$$

Дисперсия равна начальному моменту второго порядка минус квадрат начального момента первого порядка. Найдём начальный момент второго порядка первой порядковой статистики нормированной случайной величины Z для нормального закона распределения.

$$\mu\left(Z_{(1)}^2\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^r r\int\limits_0^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int\limits_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{r-1}dx.$$

Отсюда дисперсия для нормального закона распределения ближайшего размера к номинальному размеру имеет вид

$$D\left(Z_{(1)}\right)=\sigma^2\left(\mu\left(Z_{(1)}^2\right)-\mu^2\left(Z_{(1)}\right)\right). \tag{2}$$

Заметим, что в [2,3] приведена формула начального момента второго порядка, а не дисперсия ближайшего размера к среднему значению нормированного нормального закона распределения.

В системе MAPLE составлена программа для нахождения дисперсии ближайшего размера к номинальному размеру в зависимости от объёма взятых изделий. Фрагмент значений этой дисперсии приведён в таблице.

Таблица

r	2	3	4	5	6	7
$D\left(Z_{(1)}\right)/\sigma^2$	0,144927	0,080638	0,052015	0,036554	0,027184	0,021049

Равномерный закон распределения размеров изделий. Для определения точности изделия изготовленных по шестому и меньшему квалитету точности применяется равномерный закон распределения [1] с функцией плотности распределения размеров

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le a-l; \\ \dfrac{1}{2l} & при \quad a-l < x \le a+l; \\ 0 & при \quad x > a+l,\end{cases} \qquad (3)$$

где a - середина отрезка длиной $2l$.

Тогда плотность распределения случайной величины $Z=|X-a|$ имеет вид

$$\varphi(z)=\begin{cases}0 & при \quad z \le 0; \\ \dfrac{1}{l} & при \quad 0 < z \le l.\end{cases}$$

Функция распределения этой случайной величины равна

$$\psi(z)=\begin{cases}0 & при \quad z \le 0; \\ \dfrac{z}{l} & при \quad 0 < z \le l.\end{cases}$$

Тогда на основании (1) плотность распределения ближайших значений к среднему значению выборки объёма r имеет вид

$$g(z_{(1)})=\frac{r}{l^r}(l-z)^{r-1}.$$

Математическое ожидание для данного распределения равно

$$M\left(Z_{(1)}\right)=\frac{l}{r+1},$$

а начальный момент второго порядка

$$M\left(Z_{(1)}^2\right)=\frac{2l^2}{(r+1)(r+2)}.$$

Тогда дисперсия этой случайной величины – ближайшей к номинальному размеру, равна

$$D\left(Z_{(1)}\right)=M\left(Z_{(1)}^2\right)-M^2\left(Z_{(1)}\right)=l^2\frac{r}{(r+1)^2(r+2)}. \qquad (4)$$

Так как дисперсия генеральной совокупности $D(X)=l^2/3$, то эта дисперсия определяется через дисперсию генеральной совокупности выражением

$$D\left(Z_{(1)}\right)=\frac{3rD(X)}{(r+1)^2(r+2)}.$$

При объёме выборки $r=5$ эта дисперсия в 16,8 раза меньше дисперсии генеральной совокупности, что говорит о высокой точности этой статистики.

Закон распределения Симпсона размеров изделий. Для квалитетов точности восьмого, седьмого и некоторых случаях шестого используется для оценки точности распределение Симпсона [1]. Поэтому найдём для этого распределения плотность распределения случайной величины ближайшей к среднему значению.

Функция плотности распределения Симпсона с математическим ожиданием равным a имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<a-2l; \\ \dfrac{x+2l-a}{4l^2} & при \quad a-2l<x\le a; \\ \dfrac{a+2l-x}{4l^2} & при \quad a<x\le a+2l; \\ 0 & при \quad x>a+2l. \end{cases} \qquad (5)$$

Отсюда плотность распределения $Z=|X-a|$ этой случайной величины имеет вид

$$\varphi(z)=\begin{cases} 0 & при \quad z\le 0; \\ \dfrac{2l-z}{2l^2} & при \quad 0<z\le 2l; \\ 0 & при \quad z>2l. \end{cases}$$

Интеграл от z до $2l$ от данной плотности распределения, т. е. единица минус функция распределения, имеет вид

$$1-\psi(z)=\int_z^{2l}\frac{2l-t}{2l^2}dt=\frac{(2l-z)^2}{4l^2}.$$

Отсюда имеем из (1), что плотность распределения ближайшего значения к номинальному значению из выборки объёма r будет иметь вид

$$g(z_{(1)})=\frac{r}{l}\left(\frac{2l-z}{2l}\right)^{2r-1}.$$

Математическое ожидание для данного распределения равно

$$M\left(Z_{(1)}\right)=\frac{2l}{2r+1},$$

а начальный момент второго порядка

$$M\left(Z_{(1)}^2\right)=\frac{4l^2}{(2r+1)(r+1)}.$$

Отсюда дисперсия ближайшего значения до номинального значения имеет вид

$$D\left(Z_{(1)}\right)=l^2\frac{4r}{(2r+1)^2(r+1)}. \qquad (6)$$

Так как дисперсия для распределения (5) имеет вид

$$D(X)=\frac{2l^2}{3},$$

то для распределения Симпсона дисперсия случайных величин при объёмах выборки r ближайших к математическому ожиданию равна

$$D\left(Z_{(1)}\right)=\frac{6r\,D(X)}{(r+1)(2r+1)^2}.$$

При объёме выборки $r=5$ эта дисперсия в 24,2 раза меньше дисперсии генеральной совокупности, что говорит о высокой точности этой статистики при таком малом объёме выборки.

Выводы

Полученные дисперсии размера минимального отклонения от номинального размера для трёх законов распределения точности изготовления изделий малы уже при малом объёме выборки, что говорит о малой ошибки в размерах высококачественных изделий с размерами близкими к номинальному размеру. Поэтому выбирая, и замеряя их, и ранжируя их по отклонению от номинального размера можно создать методику получения качественных изделий, особенно это важно для сборки изделий [4].

Список литературы

1. Маталин А.А. Технология машиностроения: Учебник для машиностроительных вузов по специальности «Технология, металлорежущие станки и инструменты». [Текст] / А.А. Маталин -Л.: Машиностроение, 1985. -496с.
2. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений [Текст]: пер. с англ. под ред. А.Н.Колмогорова. –М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1966. -588 с.
3. Дейвид Г. Порядковые статистики [Текст]: пер. с англ. под ред. В.В.Петрова; – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. -336с.
4. Патент на корисну модель №57011. Спосіб на комплектування деталей для складання підшипників ковзання [Текст]/ Купріянов О.В., Ламнауер Н.Ю., Резніченко М.К. - № и 2010 06971; заявл. 07. 06. 2010; опубл. 10. 02. 2011, Бюл. №3. – 4с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. А. М. Долматов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 16.05.2011

Розподілення самих точних виробів для різничних квалитетів точністі виробництва

Отримано розподіли випадкової величини найближчих розмірів до номінальних та їхні числові характеристики для виробів з різними квалітетами точності виготовлення. Показано. Що ці розміри мають малу похибку відхилень та можуть бути використані для отримання якісних виробів.

Ключові слова: точність, якість, розподіл, числові характеристики.

Random distributions of high-quality products having various accuracy degrees of manufacturing

It has been obtained the random distribution of the closest sizes, which are the closest to the nominal size and numerical characteristics of the products having various accuracy degrees of manufacturing. It has been shown that these sizes have small error in deviations and can be used to obtain high-quality products.

Keywords: accuracy, quality, distribution, and numerical characteristics.