УДК 517.958:532/533, 681.51.015

О.С.Бичков, А.Л.Заворотний,
В.С.Касьянюк

Застосування парето-оптимального підходу для розв'язання задачі спостережуваності

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Розроблено та наведено парето-оптимальний метод розв'язування задачі спостережуваності для лінійних стаціонарних систем керування. Метод ураховує при відновленні характеристик стану об`єкта наявність збурень у похідних цих характеристик. Проведено порівняння розробленого та класичного методів розв'язування задачі спостережуваності.

Ключові слова: спостереження, відновлення фазової змінної, Парето.

Вступ. Вимірювання та спостереження є необхідною складовою керування. Навіть коли будується так зване програмне керування – функція часу, що визначається, наприклад, на стадії проектування, первинним є вимірювання, що надає необхідну інформацію про керований процес.

Поняття сопостережуваності й вимірюваності [1], як відомо, мають різний зміст у теорії керування. Термін "вимірюваність" наголошує на безпосередній характер отримання числового значення тієї чи іншої фізичної величини, у той час як "спостережуваність" – на його неможливість. На жаль, у задачах керування, зокрема в задачах керування літальними апаратами, безпосереднє отримання значення фізичної величини не завжди є можливим. Натомість отримувана інформація містить потрібні величини в спотвореному вигляді. Так, якщо G – деякий прилад із відомими характеристиками, що надає інформацію про стан об'єкта, – вектор u, то інформація на виході приладу має вигляд

$$y = Gu + \nu, \qquad (1)$$

де y – вектор отримуваної інформації, ν – вектор зашумлення виходу з приладу.

Таким чином, отримувана інформація виявляється спотвореною, по-перше, самою природою приладу, що перетворює необхідні дані, та, по-друге, шумовою компонентою. У багатьох випадках оператор G є лінійним, часто матричним або перетворенням з одного гільбертова простору в інший.

Мета. Проблема, отже, полягає в тому, щоб з вимірювання y отримати найбільш точні значення параметрів об'єкта, причому не ті, які він має, будучи спотвореним у системі вимірювання, а інші, властиві системі «об'єкт-середовище», не спотвореній вимірюванням.

У більш загальній постановці необхідно вирішити задачу оцінювання вимірювання певним гіпотетичним приладом Π за результатами вимірювання приладом G з відомими характеристиками. В математичному плані це задача оцінки значення заданого оператора Гільберта-Шмідта на невідомому елементі деякого гільбертова простору за збуреними значеннями іншого лінійного обмеженого оператора на цьому ж невідомому елементі.

Основний результат. В основу методу, використаного для розв'язання даної задачі, покладено метод редукції вимірювань до виходу із заданого приладу Ю.П. Питьєва [2] . Згідно із цим методом, рівняння (1) перетворюється до вигляду

$$By = \Pi u + (BG - \Pi)u + B\nu \,.$$

За оцінку $\hat{\Pi u}$ приймають By, де B є розв'язком задачі опуклого програмування:

$$\begin{cases} \varphi(B) \xrightarrow[B]{} \min \\ h(B) \le \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} h(B) \xrightarrow[B]{} \min \\ \varphi(B) \le \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{cases}.$$

Тут критерії оптимізації мають чітку фізичну інтерпретацію, а саме: $h(B) = M\|Bv\|^2$ – рівень шумового фону (дисперсія) оцінки $\hat{\Pi u} = By$, а $\varphi(B) = \|BG - \Pi\|$ – операторна нев'язка, що характеризує її зсув.

З описаного перетворення природно випливає задача одночасної мінімізації як рівня шумового фону, так і величини операторної нев'язки шуканої оцінки, тобто двокритеріальна задача оптимізації:

$$\begin{cases} \varphi(B) \xrightarrow[B]{} \min \\ h(B) \xrightarrow[B]{} \min \end{cases}. \qquad (2)$$

Розв'язками задачі (2) є множина ефективних векторів $\tilde{B}$, таких, що за умови

$$\varphi(\hat{B}) \le \varphi(\tilde{B})$$
$$h(\hat{B}) \le h(\tilde{B})$$

випливає, що $\varphi(\hat{B}) = \varphi(\tilde{B})$, $h(\hat{B}) \le h(\tilde{B})$.

У роботі [3] дана задача розв'язана, і отримана континуальна множина ефективних векторів:

$$\tilde{B} = B_{\alpha} = \Pi G^{*}(K + \alpha R)^{-1}, 0 < \alpha < \infty,$$

де $K = GG^{*}, R = M(vv^{*})$, а відповідні парето-оптимальні оцінки Πu мають вигляд

$$\hat{\Pi u} = \Pi G^{*}(K + \alpha R)^{-1} y, 0 < \alpha < \infty. \qquad (3)$$

У (3) α – параметр Парето. Для вибору параметра Парето можна скористатися принципами багатокритеріальної оптимізації [4]. При цьому критерії задачі (2) при зміні даного параметра матимуть протилежні тенденції до зміни.

Задача спостережуваності відіграє надзвичайно важливу роль у задачах керування в аеродинаміці, тому велике значення має точне визначення параметрів польоту за даними вимірювальних приладів.

Під час тестування літального апарата застосовують велику кількість датчиків, які дозволяють вимірювати важливі параметри безпосередньо. Але після проведення випробувань велику кількість датчиків прибирають і безпосереднє вимірювання стає недоступним. Тому доводиться розв'язувати задачу спостережуваності.

У даній статті розглянуто модель лінійного керування :

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ u = Cx. \tag{4}$$

Позначивши $\overline{A} = A + BC$, будемо далі розглядати систему

$$\dot{x} = \overline{A}x. \tag{5}$$

Вважатимемо, що частина параметрів вектора x може бути виміряна безпосередньо. Нехай довжина вектора x дорівнює n, а кількість відомих компонент – m. Не зменшуючи загальності, вважатимемо також, що відомі параметри знаходяться на початку вектора x.

Позначимо через $x^m = (x_1,...,x_m)$ – відому частину вектора x, а через $x^{m-n} = (x_{m-n+1},...,x_n)$ – його невідому частину.

Якщо врахувати, що частина $\dot{x}^m = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_m)$ вектора $\dot{x}$ може бути виміряна з похибками, що природно в реальних умовах, або ж якщо ця частина взагалі є невідомою, і її потрібно оцінити за допомогою відомих значень $x^m = (x_1,...,x_m)$, то для системи (5) отримаємо задачу вигляду (1).

Отже, зафіксуємо деякий момент часу $\tilde{t} \in [0;T]$ і припустимо, що в даний момент відомі перші m елементів вектора x $(x_i(\tilde{t}),\ i = \overline{1,m},\ 1 \le m \le n-1)$, а також відомі перші m елементів вектора $\dot{x}$. Похибки в оцінці або у вимірах $\dot{x}$ промоделюємо, додавши в праву частину (4) випадковий вектор ν:

$$\dot{x}_{\tilde{t}} = \overline{A}x_{\tilde{t}} + \nu,$$

де $\dot{x}_{\tilde{t}}$ та $x_{\tilde{t}}$ – вектори $\dot{x}$ і x у момент $\tilde{t}$, $\nu = (\nu_1,...,\nu_n)^*$ - вектор випадкових величин.

Розглянемо відому частину

$$\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}} = \tilde{A}x_{\tilde{t}} + \tilde{\nu}, \tag{6}$$

де $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}} = (\dot{x}_1(\tilde{t}),\ ...,\dot{x}_m(\tilde{t}))^*$, $\tilde{\nu} = (\nu_1,...,\nu_m)^*$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$.

Для випадку, коли значення елементів $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ вимірюються приладами, припустимо, що нам відомі перші два моменти випадкового вектора $\tilde{\nu}$, а саме математичне сподівання та коваріаційна матриця $\tilde{\Re}_\nu = \begin{pmatrix} M(\nu_1\nu_1) & M(\nu_1\nu_m) \\ M(\nu_m\nu_1) & M(\nu_m\nu_m) \end{pmatrix}$.

Припустимо також, що $M(\nu) = 0$ та $\tilde{\Re}_\nu$ – невироджена матриця. Такі умови є типовими в реальних вимірюваннях. Міркування щодо отримання цих параметрів у випадку, коли значення елементів $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ невідомі, наведені далі.

Введемо такі позначення:

$$x_{\tilde{t}}^{n-m} = (x_{m+1}(\tilde{t}),...,x_n(\tilde{t}))^T,\ \tilde{A}_{n-m} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1m+1} & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{mm+1} & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix},\ y = \tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}} - \tilde{A}_m x_{\tilde{t}}^m\ ,$$

де $\tilde{A}_m = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix}$.

Тоді $y = \tilde{A}_{n-m} x_{\tilde{t}}^{n-m} + \tilde{\nu}$, і континуальна множина парето-оптимальних оцінок, як випливає з формули (3), має вигляд

$$\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m} = \tilde{A}_{n-m}^T (\tilde{A}_{n-m} \tilde{A}_{n-m}^T + \alpha \tilde{\Re}_\nu)^{-1} y, \tag{7}$$

де α – параметр оптимізації, критерії вибору якого були описані раніше.

Розглянемо тепер випадок, коли елементи $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ – невідомі, і необхідно їх оцінювати на основі відомої частини вектора x. Будемо вважати, що елементи вектора $\tilde{\nu}$ є незалежними випадковим величинами. Отже, $\tilde{\Re}_\nu$ – діагональна матриця вигляду $\tilde{\Re}_\nu = \begin{pmatrix} D\nu_1 & 0 \\ 0 & D\nu_m \end{pmatrix}$ з дисперсіями випадкових елементів вектора $\tilde{\nu}$ на її діагоналі.

Для отримання оцінки похідної $\dot{x}_i(\tilde{t})$ за $x_i(t)$, $1 \le i \le m$, математичного сподівання та дисперсії відповідної випадкової величини ν_i, $1 \le i \le m$, яка моделює похибку цієї оцінки, можемо скористатись такими міркуваннями. Будемо генерувати оцінки похідної $\dot{x}_i(\tilde{t})$ так, щоб їх можна було вважати реалізаціями деякої випадкової величини. Для цього випадковим чином, застосовуючи один і той самий розподіл, згенеруємо певну кількість сіток, а потім використаємо один із широко відомих числових методів оцінювання похідної деякої функції в точці за табульованим значенням цієї функції. Зокрема, це може бути метод невизначених коефіцієнтів або ж метод побудови інтерполяційного полінома з його подальшим диференціюванням [5, 6].

Виходячи з особливостей конкретної прикладної задачі, можна зробити певні висновки щодо кращого методу числового диференціювання, а також методу побудови сіток в околі $\tilde{t}$. Наприклад, можемо запропонувати обирати параметри сіток у вигляді випадкових величин з певним розподілом. Зокрема, можна задати ці параметри так, щоб більшою була ймовірність отримати сітку, що є симетричною відносно $\tilde{t}$,з нечіткою кількістю точок, з більшою кількістю точок, близьких до $\tilde{t}$, з нульовою ймовірністю отримати момент $\tilde{t}$ поза сітки і т. ін. У такому випадку можна вважати, що отримана сітка, а отже, і оцінка похідної, отримана на ній, є результатом дії певних детермінованих функцій на початкову векторну випадкову величину. Отже, отримані оцінки похідної $\dot{x}_i(\tilde{t})$ будуть реалізаціями деякої випадкової величини з невідомим розподілом.

Нарешті, отримавши за N такими сітками оцінки похідної $\hat{\dot{x}}_i^j(\tilde{t})$, $j = \overline{1, N}$, можемо побудувати оцінку похідної у вигляді

$$\dot{x}_i\left(\tilde{t}\right)=\frac{\sum_{j=1}^{N}\hat{\dot{x}}_i^j\left(\tilde{t}\right)}{N}-\nu_i,$$

де ν_i – випадкова величина, для якої виконується $M\nu_i=0$ і $D\nu_i=\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\dot{x}}_i^j\left(\tilde{t}\right)-M\left(\dot{x}_i\left(\tilde{t}\right)\right)\right)^2}{N-1}$. Далі те саме повторюємо для всіх $i=\overline{1,m}$.

Ефективність парето-оптимального підходу, коли результат оцінювання визначався формулою (7), була перевірена на практиці, і результати були порівняні з класичним методом розв’язання задачі спостережуваності [1].

Коротко нагадаємо, що в рамках класичного методу оцінкою невідомих характеристик стану об’єкта є побудована певним чином лінійна комбінація похідних різного ступеня від величин, що спостерігаються. Більш формально, у випадку, який розглядається в рамках статті, величиною, що спостерігається, є вектор похідних в (6). Але, як відомо, в рамках класичного методу не враховується можливість наявності похибок у значеннях похідних, отже, вважається, що

$$\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}=\tilde{A}x_{\tilde{t}}. \tag{8}$$

Позначимо вектор похідних (8) як $z(t)=\tilde{\dot{x}}_t$. Оскільки матриці $\tilde{A}$ та $\overline{A}$ є стаціонарними, то для похідної порядку k від величини, що спостерігається, правильною буде формула

$$z^k(t)=\tilde{A}\overline{A}^k x_t, \tag{9}$$

де $k\geq 0$, а $\overline{A}^0=E$ – одинична матриця.

Для моменту часу $\tilde{t}$ запишемо систему з похідних (9) для $k=\overline{0,n-1}$:

$$\begin{cases} z\left(\tilde{t}\right)=\tilde{A}x_{\tilde{t}} \\ z^1\left(\tilde{t}\right)=\tilde{A}\overline{A}x_{\tilde{t}} \\ \ldots \\ z^{n-1}\left(\tilde{t}\right)=\tilde{A}\overline{A}^{n-1}x_{\tilde{t}} \end{cases}. \tag{10}$$

Використовуючи (10), можна побудувати оцінку вектора x_t в момент часу $\tilde{t}$ як лінійну комбінацію похідних (9) для $k=\overline{0,n-1}$

$$\hat{x}_{\tilde{t}}=\begin{pmatrix}\tilde{A}\\ \tilde{A}\overline{A}\\ \ldots\\ \tilde{A}\overline{A}^{n-1}\end{pmatrix}^{-}\times\begin{pmatrix}z\left(\tilde{t}\right)\\ z^1\left(\tilde{t}\right)\\ \ldots\\ z^{n-1}\left(\tilde{t}\right)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

У формулі (11) операція над матрицею $(\cdot)^{-}$ є псевдооберненням. Ті компоненти ветктора x_t, що були відомі із самого початку, можуть бути використані для проведення аналізу якості відновлення.

Порівняння двох методів – (7) та (11), проводилося як на експериментальних даних, отриманих аналітичним розв’язанням диференціального рівняння (5), так і на реальних даних, одержаних з датчиків літального апарата під час випробувального польоту. Метод добре зарекомендував себе в обох випадках, виявивши перевагу над класичним методом.

На рисунках зображено згенеровані дані (рис. 1) та дані, отримані з датчиків реального літального апарату (рис. 2).

У подальшому початкові експериментальні дані спотворювались шумами з різним рівнем дисперсії. Зокрема, проводилось відновлення невідомих параметрів при дисперсії шумів D =0.0001 та D =0.05.

У розглянутому прикладі невідомими вважаються координати 2 та 3 згенерованих експериментальних даних. В той час, як на даних, що містять шуми з малою дисперсією (D =0.0001), методи демонструють порівняно однакові результати, проте на більш зашумлених даних (D =0.05) розроблений метод демонструє більшу спроможність до відновлення даних (рис. 3 та 4).

Приблизно таку ж поведінку продемонстрували методи і на реальних даних. Знову ж таки, при малій дисперсії (D =0.0001) обидва методи добре відновлюють дані. Але при великій дисперсії (D =0.05) класичний метод не здатний якісно відновити дані (рис. 6), у той час, як запропонований метод дає якісні результати на тому проміжку, де шум не перевищує основний сигнал (рис. 5).

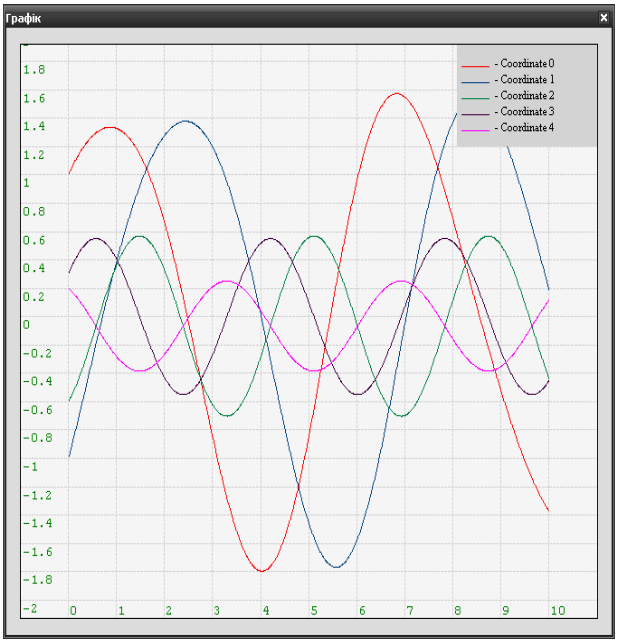

Рис. 1. Згенеровані експериментальні дані

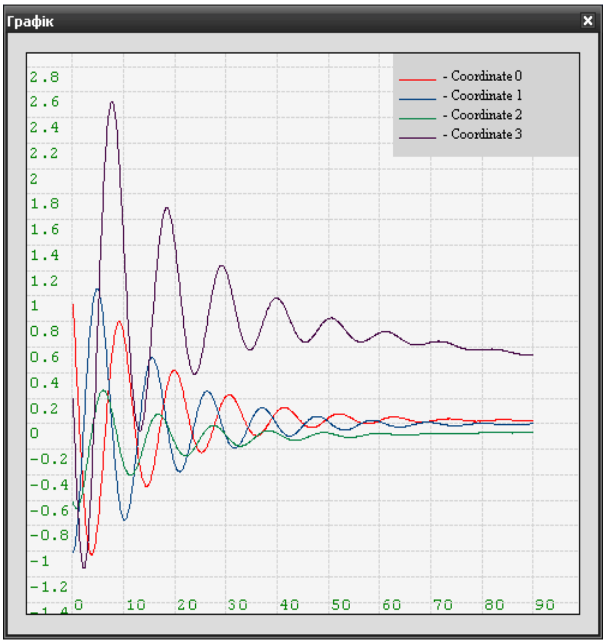

Рис. 2. Дані реального польоту

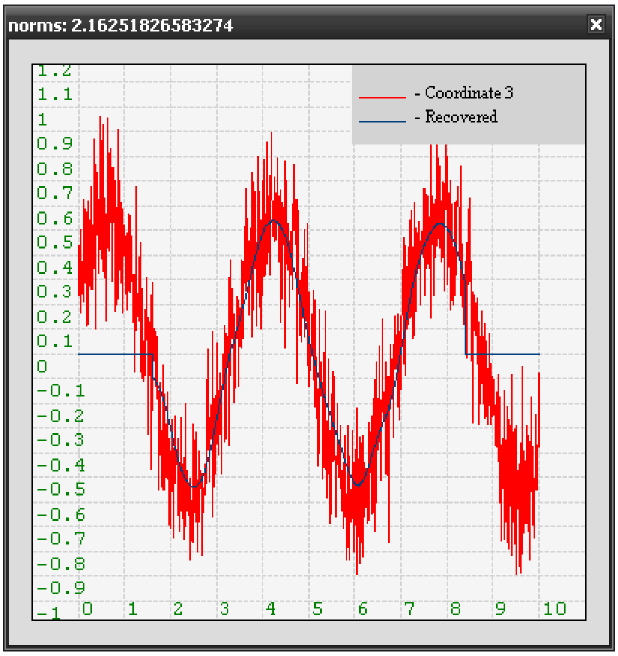

Рис. 3. Згенеровані дані, відновлені за допомогою розробленого методу (D =0.05)

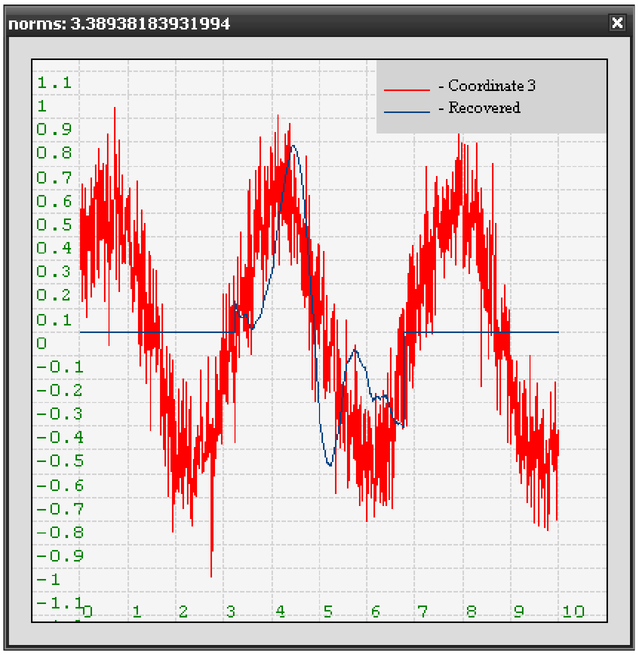

Рис. 4. Згенеровані дані, відновлені за допомогою класичного методу (D =0.05)

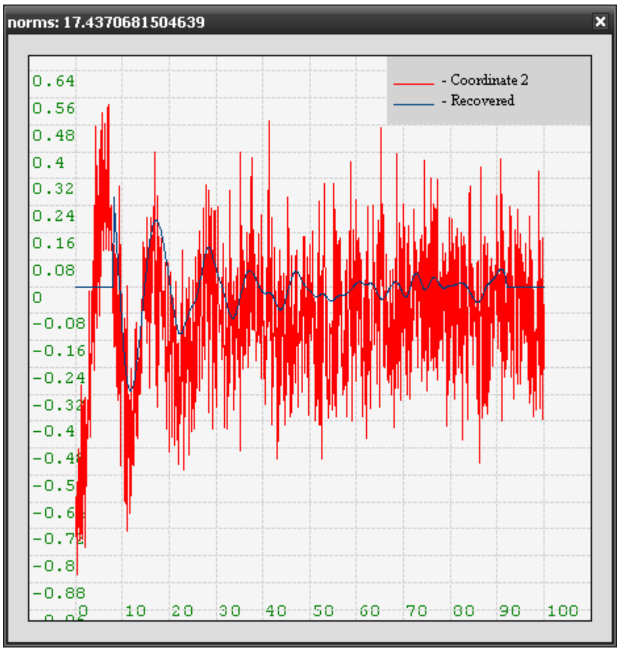

Рис. 5. Дані реального польоту, відновлені за допомогою розробленого методу (D =0.05)

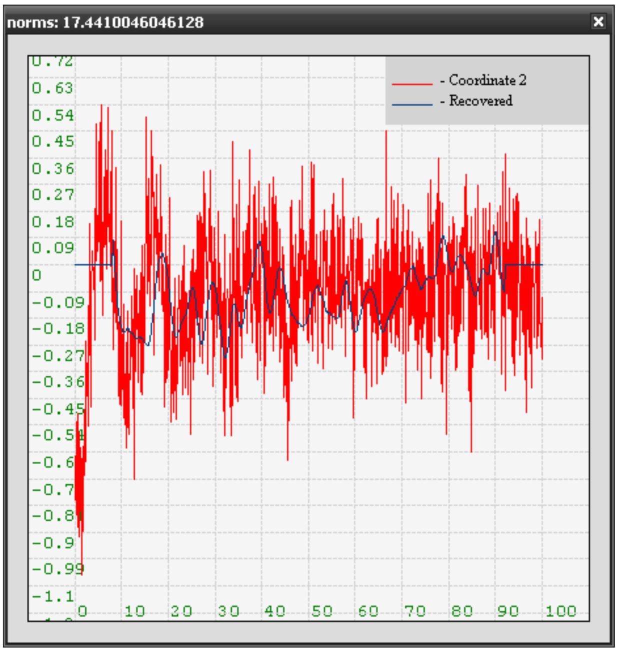

Рис. 6. Дані реального польоту, відновлені за допомогою класичного методу (D =0.05)

Висновок. У статті наведено парето-оптимальний метод розв’язання задачі спостережуваності в аеродинамічних системах. На відміну від класичної постановки розроблений метод враховує наявність похибок у похідних характеристик стану об`єкта. Метод був порівняний з одним із класичних методів розв’язання задачі спостережуваності і показав кращі результати. Для апробації розробленого методу були використані як експериментальні дані, так і дані реального польоту. Отримані результати відновлення невідомих параметрів системи керування засвідчують можливість його практичного застосування в аеродинамічних системах.

Список літератури

1. Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента/ Ю.П. Пытьев – М.: Высш. шк., 1989. – 315 с.
3. Заворотний А.Л. Розв`язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації / А.Л. Заворотний // Вісник КНУ, Сер. фіз.-мат. наук. – К., – 2004. – №3.
4. Белов Ю.А. Парето-оптимальная редукция в линейных системах со случайными погрешностями / Ю.А. Белов, В.С. Касьянюк // Сб. докл. на расширенном заседании семинара Института прикладной математики им. И.Н. Векуа. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, – 1989.– Т. 4, №3. – С. 21-24.
5. Калиткин М.М. Численные методы / М.М. Калиткин – М.: Наука, 1982. – 511 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 2003. – 632 с.

Рецензент: доктор фіз.-мат.наук, професор Бєлов Ю.А., завідувач кафедри, Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Поступила в редакцию 03.06.10

Использование парето-оптимального подхода для решения задачи наблюдаемости

Разработан и приведен парето-оптимальный метод решения задачи наблюдаемости для линейных стационарных систем управления. Метод учитывает при обновлении характеристик состояние объекта, наличие возмущений в производных этих характеристик. Проведено сравнение разработанного и классического методов решения задачи наблюдаемости. Для реализации метода разработано программное обеспечение и представлены результаты работы разработанного и классического методов как на экспериментальных, так и на реальных данных с датчиков самолета.

Ключевые слова: наблюдение, обновление фазовой переменной, Парето.

Use of Pareto optimization method for solving the observability problem

Pareto optimization based method for observability problem solving for linear steady control systems is developed and submitted. The developed method takes into account of distortions presence in derivatives of state characteristics while recovering the characteristics of the state. The developed and classical methods for observability problem solving are compared. For implementation of the developed method software were developed and results of it's work and of the classical method's work are submitted for both cases of experimental and real flight data processing.

Keywords: observation, recovery phase variable, Pareto.