УДК 519:621.01

А. К. Шапошников

Определение положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Описан алгоритм определения положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном. Рассмотрены случаи односвязного и многосвязного контуров.

Ключевые слова: контур, эвольвентный сплайн, связное множество, граница контура, точка на контуре.

Важной задачей вычислительной геометрии является определение положения точки относительно заданного контура. Сложность данной задачи зависит от свойств пространства и геометрии, с помощью которой описан контур.

Решим задачу определения положения точки относительно плоского замкнутого контура без петель самопересечения, описанного эвольвентным сплайном.

В работе [1] описан алгоритм определения положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном, методом интерполяции исходного контура многоугольником (рис.1.), вершины v_i которого лежат на контуре и удовлетворяют следующим условиям:

$$r^2(v_i, x) + r^2(v_{i+1}, x) > (l_{i+1} - l_i)^2. \tag{1}$$

Здесь $r(v_i, x)$ – расстояние от вершины v_i до точки *x;*

$l_{i+1} - l_i$ – расстояние между i - й и ($i+1$)-й вершинами по дуге контура;

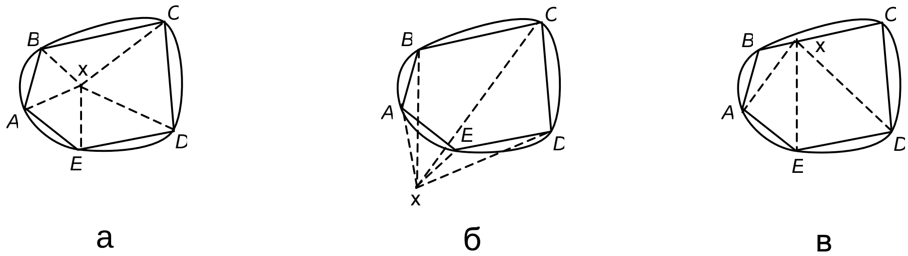

Рис. 1. Положение точки относительно многоугольника:
а – точка внутри контура; б – точка вне контура; в – точка на контуре

Для всех i от 1 до n-1 находим величину угла α_i между векторами $v_i x$ и $v_{i+1} x$. Углы α_i суммируют: $\alpha_s = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. Если $\alpha_s = 2\pi$, то точка *x* лежит внутри многоугольника, а так как выполняется условие (1), то *x* лежит внутри контура рис. 1.а. Если $\alpha_s = 0$, то точка *x* лежит вне многоугольника, а так как выполняется условие (1), то *x* лежит вне контура рис.1,б. Если $\alpha_s = \pi$, то точка *x* лежит на многоугольнике, а так как выполняется условие (1), то *x* принадлежит границе контура (рис. 1.в). В этом случае точка *x* обязательно совпадет с какой-то вершиной многоугольника, которую можно найти лишь с некоторой точностью ε.

Однако данный метод применим только в том случае, когда многоугольник, полученный в результате интерполяции исходного контура отрезками прямой, выпуклый. В случае, когда многоугольник – невыпуклый, алгоритм определения положения точки относительно многоугольника намного сложней.

Алгоритм определения положения точки относительно невыпуклого многоугольника описан в работах [2, 3]. Невыпуклый многоугольник представляют как объединение выпуклых многоугольников. В зависимости от расположения точки x относительно каждого выпуклого многоугольника определяется положение точки относительно исходного невыпуклого многоугольника.

Если точка x является внешней точкой относительно всех выпуклых многоугольников, то точка x – внешняя точка рис. 2,а. Если точка x лежит внутри одного из выпуклых многоугольников, то точка x – внутренняя точка рис.2,б. Если точка x лежит на одном из многоугольников, а относительно остальных является внешней точкой, то точка x – граничная точка рис. 2.в.

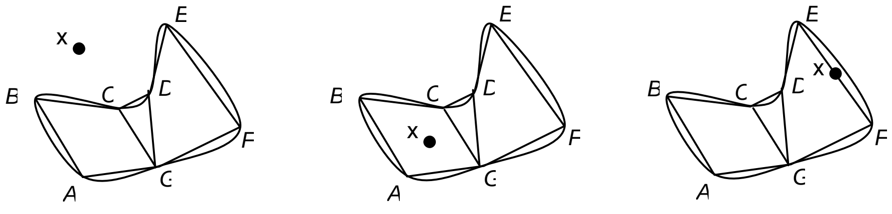

Рис. 2. Положение точки относительно многоугольника:
а – точка вне контура; б – точка внутри контура; в – точка на контуре

Однако алгоритм определения положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном, методом интерполяции исходного контура многоугольником имеет существенные недостатки. Одним из недостатков является то, что в результате интерполяции исходного контура многоугольником образуются области, которые ограничены с одной стороны ребром многоугольника, а с другой дугой контура, проходящей через начальную и конечную точки ребра многоугольника. Полученные области не учитываются при определении положения точки относительно контура, что влияет на погрешность вычислений. Другим недостатком является то, что с увеличением точности увеличивается число ребер вписанного многоугольника, что влечет за собой увеличение объема вычислений, в результате чего снижается производительность алгоритма.

Целью данной работы является построение алгоритма определения положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном, который позволит сократить объем вычислений и время, которое необходимо для выполнения программы.

Любой конечный плоский замкнутый контур ω топологически представим как k-связное множество, где k – это число замкнутых границ. Если k = 1, т.е. контур.– односвязный и имеет только внешнюю границу. Если $k > 1$, то контур помимо внешней границы имеет (k-1) внутреннюю границу. Каждая граница представляет собой: плоский, замкнутый контур без петель самопересечения, который описан с помощь эвольвентного сплайна (рис. 3).

Рассмотрим случай когда ω – односвязный контур (рис. 3).

Положение точки x относительно контура ω будем определять в зависимости от количества точек пересечения контура ω и луча p с началом в точке x и параллельного оси У (рис.3). Координаты точек пересечения луча р и дугой контура будем находить приближенным методом хорд и касательных. В результате получаем множество точек пересечения.

Если множество точек пересечения пусто, то точка x является внешней относительно контура ω. Точка является граничной (рис.4,в) если выполняется следующее условие:

$$\forall j = \overline{1,n}\, \exists x_j : \rho(x, x_j) = 0. \quad (2)$$

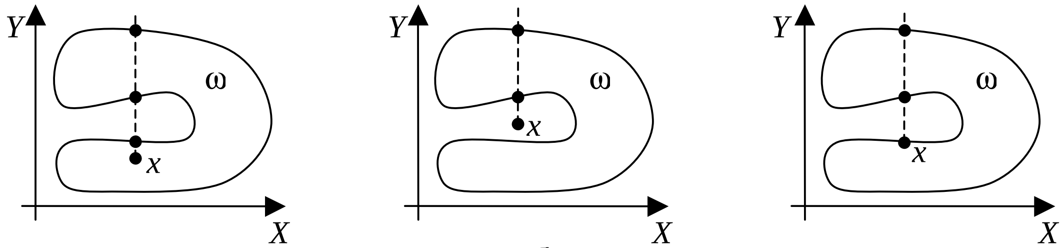

Рис. 3. Контур, описанный эвольвентным сплайном:
а – точка внутри контура; б – точка вне контура; в – точка на контуре

Здесь n – количество точек пересечения, x_j – j-я точка пересечения.

Если множество точек пересечения содержит граничную точку, то точка *x* является граничной точкой контура ω.

Если множество точек пересечения луча *p* и контура ω непусто, то положение точки x относительно контура ω будем определять следующим образом:

1. если количество точек пересечения *m* – нечетно, то *x* принадлежит внутренности контура;
2. если *m* – четно, то *x* не принадлежит контуру.

Однако, множество точек пересечения может содержать в себе особые точки. Особыми точками являются узлы контура (рис.4,б) и точки, в которых угол наклона касательной равен $\frac{\pi}{2} + \pi q, q \in Z$ (рис.3,а).

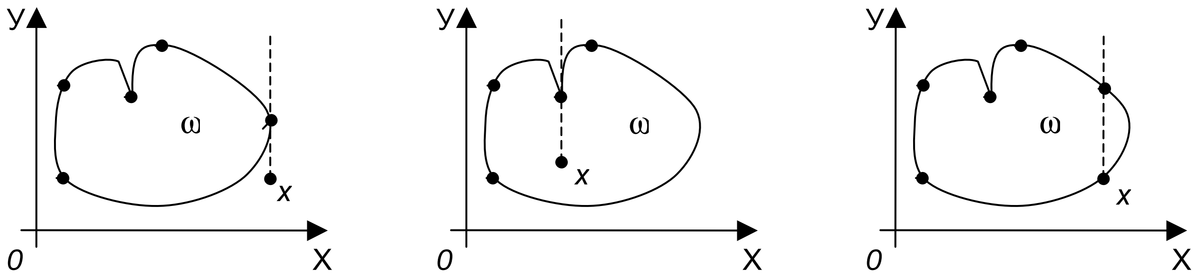

Рис. 4. Особые точки контура, описанного эвольвентным сплайном:

а – угол наклона касательной в точке пересечения равен $\frac{\pi}{2} + \pi q, q \in Z$;

б – точка пересечения является узлом контура; в – *x* – граничная точка

В случае, когда множество точек пересечения луча p и контура ω содержит особые точки необходимо повернуть луч p на угол $\varphi = \varepsilon$ с центром в точке *x* , что позволит свести данный случай к общему. Поворот необходимо осуществлять до тех пор, пока множество точек пересечения будет непусто, либо не будет содержать особых точек.

На рис. 4 изображен алгоритм определения положения точки относительно контура, описанного эвольвентным сплайном.

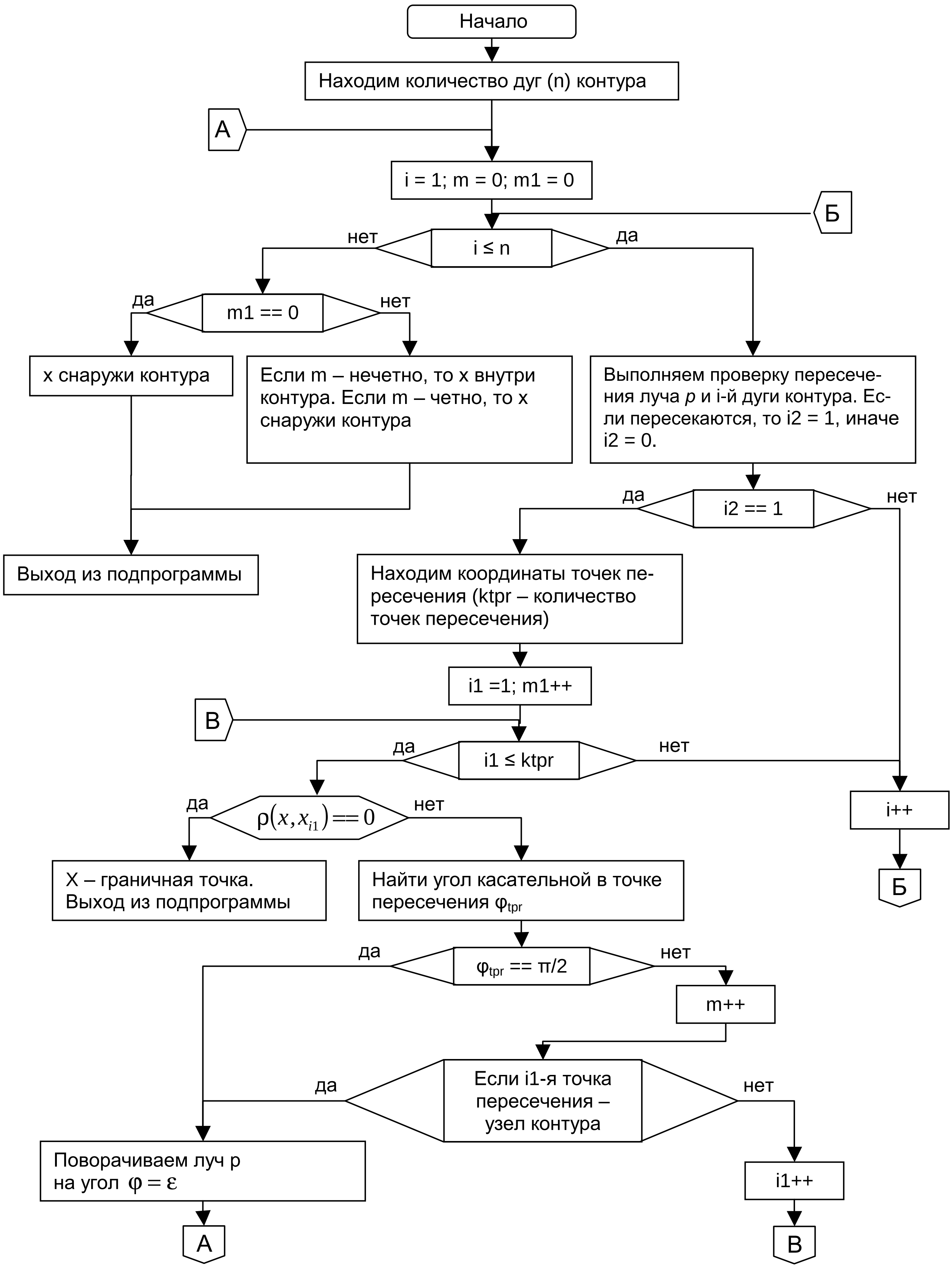

Рис. 4. Алгоритм определения положения точки относительно контура

Рассмотрим случай *k*-связного плоского замкнутого контура ω (рис. 5), границы которого описаны с помощью эвольвентных сплайнов.

Для определения положения точки относительно контура необходимо определить внешнюю и внутренние границы контура. Для этого введем определение внешней и внутренней границ.

Определение 1.Пусть ω – *k*-связный плоский контур без петель самопересечения. W_i – i-я граница *k-го* контура ω ($1 < i < k$). Контур W_v – назовем *внешней границей* контура ω, если $\exists\, v : \forall i \neq v$ и $\forall x \in W_i$ $int(x, W_v) = 1$. Контур W_i назовем *внутренней границей* контура ω, если $\exists\, v : \forall i \neq v$ и $\forall x \in W_i$ $int(x, W_v) = 1$.

После того, как внешняя и внутренние границы определены, выполняем проверку положения точки *x* относительно каждой границы контура ω по алгоритму, описанному выше (рис.4.) В зависимости от расположения точки *x* относительно границ W_i будем определять положение точки x относительно контура ω.

Определение 2.Пусть ω – к-связный плоский замкнутый контур. W_v – *внешняя граница* контура ω, если W_v содержит в себе все контура ω. W_i – *внутренняя граница* контура ω, если $\exists\, v : \forall i \neq v$ и $\forall x \in W_i$ $int(x, W_v) = 1$.Будем называть точку *x:* Если для внешней границы W_v контура ω $int(x, W_v) = 1$, $\forall i \neq v$, $int(x, W_i) = 0$, то точка *x* является *внутренней.* Если для внешней границы W_v контура ω $int(x, W_v) = 1$, $\forall i \neq v$ $int(x, W_i) = 1$ либо для внешней границы W_v контура ω $int(x, W_v) = 0$, $\forall i \neq v$ $int(x, W_i) = 0$, то точка *x* является *внешней.*

Определение 3.Точка *x* является *граничной,* если принадлежит одной из границ многосвязного плоского контура ω. Данное условие можно записать как:

$$\forall i = \overline{1,k} \exists W_i, int(x, W_i) = \frac{1}{2}.$$

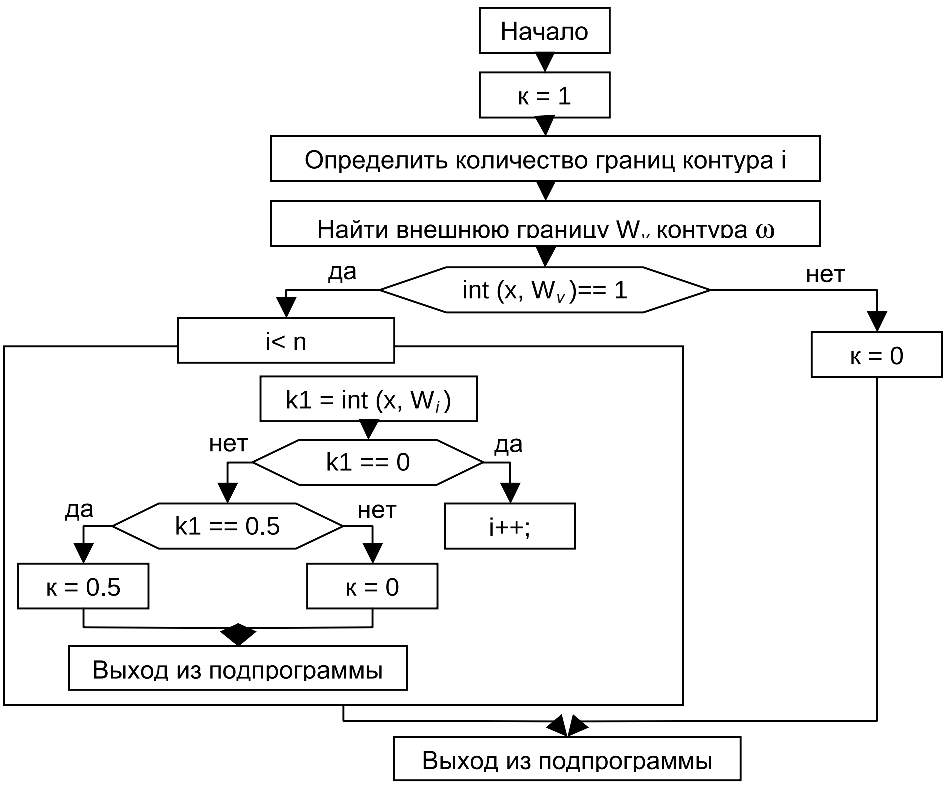

Рис. 5. Алгоритм определения положения точки относительно контура

Таким образом, полученный алгоритм определения положения точки относительно односвязного либо многосвязного контура, границы которого описаны эвольвентным сплайном, позволяет сократить время и ресурсы компьютера, которые необходимы для выполнения алгоритма.

Список литературы

1. Бут Е.Н. Математическая модель фигуры в эвольвентной сплайновой геометрии / Е.Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2002. – Вып. 14. – С. 25 – 31.
2. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.
3. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на С++ /М. Ласло. – М. : БИНОМ, 1997. – 304 с.

Рецензент: д.т.н., проф., гл.н.с ИПМаш НАН Украины Раисов Ю.А.

Поступила в редакцию 11.06.2010

Визначення положення точки відносно контуру, описаного за допомогою эвольвентного сплайну

Описано алгоритм визначення положення точки відносно контуру, описаного евольвентним сплайном. Розглянуто випадки однозв'язного та багатозв'язного контурів.

Ключові слова: контур, евольвентний сплайн, зв'язна множина, границя контуру, точка на контурі.

Diagnosing position of a point relatively contour, which written by involute spline

In this paper was written algorithm of diagnosing position of a point relatively contour, which is written by involute spline. Chance of monobound and multibound contours are written.

Keywords: contour, involute spline, multibound contours, bound of the contour, point on a contour.