

Расчёт потенциального поля в тонких многолистных пластинах, состоящих из круговых полуколец

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет*

Рассмотрен новый класс задач о расчёте потенциальных полей в тонких многолистных пластинах, составленных из различных по физическим свойствам круговых полуколец. Предложен метод получения точных решений этих задач. В основу метода положен специальный приём симметризации краевых условий. Для пластин, составленных из полукругов, решения гармонических задач Дирихле и Неймана представлены аналогами классических интегралов Пуассона и Дини. Указаны возможные обобщения метода и его приложение к задачам кручения неоднородного стержня.

Ключевые слова: многолистные тонкие пластины, потенциальное поле, обобщённые интегралы Пуассона и Дини, симметризация краевых условий.

Исследование многих инженерных проблем современной энергетики связано с расчётом потенциальных полей (электрических, магнитных, тепловых, гидродинамических и др.). Необходимость таких исследований в последние годы значительно возросла в связи с проектированием новых компактных приборных комплексов в радиоэлектронике, миниатюризации энергетических установок космических аппаратов и других отраслях. Некоторые методы решения указанных проблем предложены в работах [1 – 3].

В статье предложен метод получения точных решений задач теории поля в тонких пластинах книжной конструкции [2], состоящей из геометрически одинаковых полуколец (рис. 1). Лепестки пластин изготовлены в общем случае из разных материалов. Рассматриваются два возможных варианта (в задачах типа теплопроводности): а) боковые стороны пластины не взаимодействуют с окружающей средой; б) учитывается теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

Для пластин, состоящих из полукруговых лепестков, и пластин, лепестки которых представляют собой полуплоскости с выброшенными полукругами, получены аналоги классических формул Пуассона и Дини решения внутренних и внешних гармонических задач Дирихле и Неймана для круга [4].

1. Постановка задачи

В трехмерном пространстве расположена пластина, составленная из трёх одинаковых лепестков (рис 1, 2). Лепестки изготовлены из одного и того же по физическим свойствам материала. Сами лепестки представляют собой круговые полукольца (полукруги) радиусов r_1 и r_2 , соединенных между собой так, как это показано на рисунках, и имеют совершенный контакт между собой (пластина отлита из одного материала или разнородные лепестки спаяны между собой).

В силу тонкости пластины примем, что поле вдоль её толщины постоянно. Обобщение на N лепестков и неоднородные лепестки будет сделано ниже в п. 4.

С каждым лепестком пластины свяжем систему декартовых координат xOz (рис. 2), сами лепестки пронумеруем ($j = 1, 2, 3$). В таком случае все системы будут совершенно идентичными и различать их следует по принадлежности к лепестку.

стку с номером j . Потенциальное поле в пластине обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$, оно будет состоять из трех компонент $u_j(x, z)$ ($j = 1, 2, 3$). Каждая из компонент поля $u_j(x, z)$ должна в области, занятой j -ым лепестком, удовлетворять уравнению состояния

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - k^2 u_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

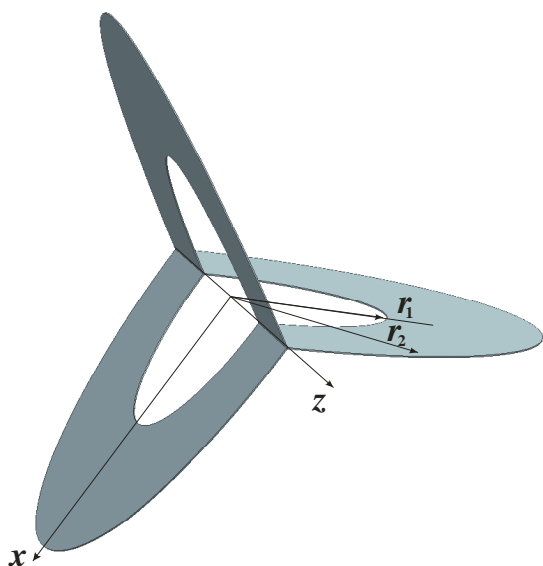


Рис. 1. Пластина из полукольцевых лепестков

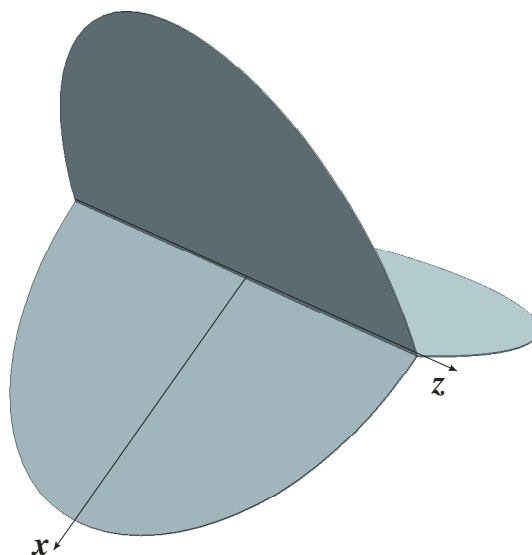


Рис. 2. Пластина из полукруговых лепестков

На границе каждого лепестка задано одно из условий задач Дирихле или Неймана. Кроме того, на линии соединения лепестков $x = 0$ должны соблюдаться условия сопряжения полей (условия совершенного контакта):

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, z) = u_2(0, z) = u_3(0, z), \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad r_1 \leq z \leq r_2. \quad (1.2)$$

Первое условие в (1.2) отражает условие непрерывности поля u на линии $x = 0$, второе условие вытекает из формулы Гаусса-Остроградского, применённой к элементарному участку пластинки, охватывающему часть оси z .

Нужно найти поле $u = (u_1, u_2, u_3)$ в многолистной пластинке, т. е. функции $u_j(x, z)$, удовлетворяющие уравнению (1.1), соответствующему краевому условию и условиям сопряжения (1.2).

Отметим, что в задачах стационарной теплопроводности случай $k = 0$ в (1.1) отвечает условию а), $k \neq 0$ – условию б).

Задачи будем решать в полярной системе координат

$$z = \rho \cos \varphi, \quad x = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Возможны случаи вырождения полуколец в полукруги или в полуплоскости с выброшенными одинаковыми полукругами.

2. Метод решения. Основные результаты ($k = 0$)

1. *Задача Дирихле.* На внутренней и внешней границе полукольца заданы условия задачи Дирихле:

$$u_j(r_1, \varphi) = f_j(\varphi), \quad u_j(r_2, \varphi) = g_j(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Решение уравнения Лапласа выбираем в виде

$$u_j(\rho, \varphi) = a_0 + c \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho/r_2)^n \cdot (a_n \cos n\varphi + e_n^{(j)} \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (r_1/\rho)^n (b_n \cos n\varphi + c_n^{(j)} \sin n\varphi), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Первое условие сопряжения (1.2) будет удовлетворяться при любых значениях постоянных, входящих в (2.2). Для удовлетворения второго условия (1.2) требуется, чтобы коэффициенты $e_n^{(j)}$, $c_n^{(j)}$ были связаны равенствами

$$e_n^{(1)} + e_n^{(2)} + e_n^{(3)} = 0, \quad c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + c_n^{(3)} = 0. \quad (2.3)$$

Остаётся удовлетворить крайевым условиям задачи (2.1).

Традиционный подход к решению этого вопроса не приводит к цели (попробуйте). Для того чтобы решить его, введём вспомогательные функции

$$F = \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3), \quad \varphi_1 = \frac{1}{3}(2f_1 - f_2 - f_3), \quad (2.4)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3}(2f_2 - f_1 - f_3), \quad \varphi_3 = \frac{1}{3}(2f_3 - f_1 - f_2)$$

на внутренних границах полукольца и соответственно функции

$$\Phi = \frac{1}{3}(g_1 + g_2 + g_3), \quad \psi_1 = \frac{1}{3}(2g_1 - g_2 - g_3), \quad (2.5)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{3}(2g_2 - g_1 - g_3), \quad \psi_3 = \frac{1}{3}(2g_3 - g_1 - g_2)$$

на внешних границах полукольца.

Продолжим функции $F(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ чётным образом на промежуток $(-\pi, 0)$ и разложим их в ряды Фурье по системе $\cos n\varphi$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \cos n\varphi, \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(2)} \cos n\varphi. \quad (2.6)$$

Функции $\varphi_j(t)$ и $\psi_j(t)$ продолжим нечётным образом на $(-\pi, 0)$ и разложим их в ряды по системе $\sin nt$

$$\varphi_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(j)} \sin nt, \quad \psi_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(j)} \sin nt. \quad (2.7)$$

Приём, который здесь предлагается для удовлетворения крайевых условий, т. е. приём построения вспомогательных функций с их последующим продолжением, в дальнейшем будем называть симметризацией крайевых условий.

Построенные вспомогательные функции (2.4), (2.5) удовлетворяют условиям

$$f_j = F + \varphi_j, \quad g_j = \Phi + \psi_j, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0, \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \equiv 0, \quad (2.8)$$

$$\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} + \beta_n^{(3)} = 0, \quad \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} + \gamma_n^{(3)} = 0.$$

Краевые условия (2.1) будем рассматривать как равенства

$$u_j(r_1, t) = F(t) + \varphi_j(t), \quad u_j(r_2, t) = \Phi(t) + \psi_j(t), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Из разложений (2.6), (2.7) и равенств (2.9) получаем системы

$$\begin{cases} a_0 + c \ln r_1 = \alpha_0^{(1)}, \\ a_0 + c \ln r_2 = \alpha_0^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon^n a_n + b_n = \alpha_n^{(1)}, \\ a_n + \varepsilon^n b_n = \alpha_n^{(2)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon^n e_n^{(j)} + c_n^{(j)} = \beta_n^{(j)}, \\ e_n^{(j)} + \varepsilon^n c_n^{(j)} = \gamma_n^{(j)}; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon = r_1/r_2.$$

Из (2.10) находим неизвестные $a_n, c, b_n, e_n^{(j)}, c_n^{(j)}$, и тем самым условия задачи удовлетворяются. В частности

$$e_n^{(j)} = \frac{1}{\Delta} (\varepsilon^n \beta_n^{(j)} - \gamma_n^{(j)}), \quad c_n^{(j)} = \frac{1}{\Delta} (\varepsilon^n \gamma_n^{(j)} - \beta_n^{(j)}), \quad \Delta = \varepsilon^{2n} - 1. \quad (2.11)$$

Подставив коэффициенты (2.11) в (2.3), убеждаемся в том, что последние равенства удовлетворяются для произвольных граничных функций $f_j(t), g_j(t)$. Точное решение задачи найдено в рядах.

Предельный переход $r_1 \rightarrow 0$ даёт решение задачи для трехлепестковой пластинки, составленной из полукругов (рис. 2):

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho/r_2)^n \cdot (\alpha_n^{(2)} \cos n\varphi + \gamma_n^{(j)} \sin n\varphi), \quad \rho < r_2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Как и в классическом случае, ряд (2.12) может быть свёрнут в интеграл

$$u_j(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_j(t) R(x, \varphi, t) dt + \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi [3\Phi(t) - g_j(t)] \frac{(1-x^2) dt}{1+x^2 - 2x \cdot \cos(\varphi - t)}; \quad (2.13)$$

$$R(x, \varphi, t) = x \frac{\cos(\varphi - t) - x}{1+x^2 - 2x \cdot \cos(\varphi - t)} + \frac{1+2x^2 - 3x \cdot \cos(\varphi + t)}{3(1+x^2 - 2x \cdot \cos(\varphi + t))},$$

$$x = \rho/r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad j = 1, 2, 3.$$

Формула (2.13) представляет собой аналог интеграла Пуассона гармонической задачи Дирихле для круга [4]. Отметим, что для двух полукруговых лепестков формула (2.13) преобразуется к классическому интегралу Пуассона решения задачи для круга.

Второй предельный переход $r_2 \rightarrow \infty$ даёт решение задачи Дирихле в трёх склеенных между собой полуплоскостях с полукруговыми вырезами. Они имеют вид

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (r_1/\rho)^n \cdot (\alpha_n^{(1)} \cos n\varphi + \beta_n^{(j)} \sin n\varphi), \quad \rho_1 > r_1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Это решение также, как и предыдущее, можно просуммировать и получить формулу, аналогичную (2.13), с той лишь разницей, что в ней вместо переменной

x будет стоять переменная $y = r_1/\rho$, вместо функций $g_j(t)$ и $\Phi(t)$ – функции $f_j(t)$ и $F(t)$.

В случае двух лепестков решение (2.14) легко преобразуется в интеграл Пуассона внешней задачи Дирихле для круга.

2. *Задача Дирихле.* На внутренней и внешней границе полукольца заданы краевые условия задачи Неймана:

$$\frac{\partial u_j}{\partial n}\Big|_{\rho=r_1} = f_j(\varphi), \quad \frac{\partial u_j}{\partial n}\Big|_{\rho=r_2} = g_j(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

где n – внешняя нормаль к границе.

Известно [4], что внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа разрешима лишь при условии

$$\sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial n}\Big|_{\rho=r_1} + \frac{\partial u_j}{\partial n}\Big|_{\rho=r_2} \right) dl = 0,$$

где l_j – внутренняя и внешняя полуокружности.

В данном случае это условие принимает вид

$$\sum_{j=1}^3 \int_0^\pi (r_1 f_j(t) + r_2 g_j(t)) dt = 0. \quad (2.16)$$

Решение задачи Неймана выбираем в виде (2.2). Условие сопряжения полей по производным будет удовлетворяться, если будут выполнены условия (2.3), первое условие сопряжения полей по функции выполняется автоматически.

Как и ранее удовлетворить краевым условиям (2.15) удастся за счёт симметризации краевых условий, т. е. введения вспомогательных функций $F, \Phi, \varphi_j(t), \psi_j(t)$ из п. 1.

Из условий (2.15) с учётом (2.4) – (2.7) найдём

$$c = -r_1 \alpha_0^{(1)} = r_2 \alpha_0^{(2)}, \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} a_n \cdot \varepsilon^n - b_n = -(r_1/n) \cdot \alpha_n^{(1)}, & \left\{ \varepsilon^n \cdot e_n^{(j)} - c_n^{(j)} = -(r_1/n) \cdot \beta_n^{(j)}, \right. \\ \left. a_n - \varepsilon^n b_n = (r_2/n) \cdot \alpha_n^{(2)}, \right. & \left\{ e_n^{(j)} - \varepsilon^n \cdot c_n^{(j)} = (r_2/n) \cdot \gamma_n^{(j)}. \right. \end{cases} \quad (2.18)$$

Равенство (2.17) приводит к условию $r_1 \alpha_0^{(1)} + r_2 \alpha_0^{(2)} = 0$, которое в развёрнутом виде представляет собой условие разрешимости задачи (2.16). Определитель систем (2.18) отличается от определителя Δ из п. 1 только знаком. Система уравнений (2.18) даёт возможность найти неизвестные коэффициенты в явном виде. Таким образом, точное решение задачи найдено в виде ряда.

Переход к полукруговым лепесткам: $r_1 \rightarrow 0$. В этом случае имеем решение

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho/r_2)^n \cdot (r_2/n) \cdot \left(\alpha_n^{(2)} \cos n\varphi + \gamma_n^{(j)} \sin n\varphi \right), \quad \rho > r_2.$$

Это решение можно представить в интегральной форме:

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \frac{r_2}{\pi} \int_0^\pi \{ \Phi(t) [h(x, \varphi - t) + h(x, \varphi + t)] + \psi_j(t) \cdot [h(x, \varphi - t) - h(x, \varphi + t)] \} dt, \quad (2.19)$$

$$h(x, t) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos t + x^2), \quad x = \rho/r_2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Формула (2.19) представляет собой аналог классической формулы Дини решения внутренней задачи Неймана для круга. Для двух полукругов это решение легко преобразовать в классическую формулу Дини для круга [4].

Второй предельный переход: $r_2 \rightarrow \infty$. Из (2.2) имеем точное решение для полуплоскостей с выброшенными полукругами:

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0 - r_1 \cdot \alpha_0^{(1)} \ln \rho + r_1 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1/\rho)^n \frac{1}{n} (\alpha_n^{(1)} \cos n\varphi + \beta_n^{(j)} \sin n\varphi), \quad (2.20)$$

$$\rho > r_1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Суммирование рядов приводит к формуле

$$u_j(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \frac{r_1}{\pi} \int_0^\pi \{ F(t) [\ln \rho + h(y, \varphi - t) + h(y, \varphi + t)] + \varphi_j(t) \cdot [h(y, \varphi - t) - h(y, \varphi + t)] \} dt, \quad y = r_1/\rho, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) есть аналог формулы Дини решения внешней задачи Неймана для круга. Для двух полуплоскостей её можно преобразовать в классическую формулу Дини для внешности круга.

3. *Смешанная задача.* На внутренней границе полукольца задано краевое условие задачи Дирихле, на внешней – краевое условие задачи Неймана или наоборот.

Решение этих задач с использованием приема симметризации граничных условий не вызывает затруднений.

3. Решение граничных задач для случая $k \neq 0$

1. *Задача Дирихле.* На внутренней и внешней границе полукольца имеем условия (2.1). Условия сопряжения на линии $x = 0$ для решений уравнений (1.1) будут иметь вид (1.2). В полярных координатах решение уравнения (1.1) берём в виде

$$u_j(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ I_n(k\rho) (a_n \cos n\varphi + e_n^j \sin n\varphi) + K_n(k\rho) (b_n \cos n\varphi + c_n^j \sin n\varphi) \}, \quad (3.1)$$

где $I_n(x)$, $K_n(x)$ – функции Бесселя мнимого аргумента [5], $j = 1, 2, 3$.

При таком выборе функций u_j первое условие сопряжения удовлетворяется автоматически, второе условие сопряжения переходит в условие (2.3).

Путём симметризации краевых условий, т. е. введения вспомогательных функций (2.4), (2.4) и разложений (2.6), (2.7), можно удовлетворить краевым условиям задачи. Для коэффициентов в (3.1) имеем выражения

$$a_n = \Delta_n^{-1} [\alpha_n^{(1)} \cdot K_n(x_2) - \alpha_n^{(2)} \cdot K_n(x_1)], \quad b_n = \Delta_n^{-1} [\alpha_n^{(2)} \cdot I_n(x_1) - \alpha_n^{(1)} \cdot I_n(x_2)],$$

$$e_n^j = \Delta_n^{-1} [\beta_n^{(j)} \cdot K_n(x_2) - \gamma_n^{(j)} \cdot K_n(x_1)], \quad c_n^j = \Delta_n^{-1} [\gamma_n^{(j)} \cdot I_n(x_1) - \beta_n^{(j)} \cdot I_n(x_2)], \quad (3.2)$$

$$\Delta_n = I_n(x_1) \cdot K_n(x_2) - I_n(x_2) \cdot K_n(x_1) \neq 0, \quad x_s = k \cdot r_s, \quad s = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

Выполнение условий (2.3) для коэффициентов $e_n^{(j)}$, $c_n^{(j)}$ легко проверяется. Таким образом, получено точное решение задачи.

Если совершить предельный переход $r_1 \rightarrow 0$, то получим $b_n = c_n^{(j)} = 0$,

$$a_n = \alpha_n^{(2)} / I_n(x_2), \quad e_n^{(j)} = \gamma_n^{(j)} / I_n(x_2). \quad (3.3)$$

В этом случае (3.1) представляет собой точное решение в рядах задачи для трёх полукругов, соединённых по диаметру.

Другой предельный переход $r_2 \rightarrow \infty$ даёт $a_n = e_n^{(j)} = 0$,

$$b_n = \alpha_n^{(1)} / K_n(x_1), \quad c_n^{(j)} = \beta_n^{(j)} / K_n(x_1). \quad (3.4)$$

Формулы (3.1), (3.4) дают точное решение задачи для трёх склеенных полуплоскостей с полукруговыми вырезами.

2. *Задача Неймана.* На внутренних и внешних границах задачи заданы условия (2.15). Решение выбираем в виде (3.1). Краевые условия после симметризации приводят к системам

$$\begin{cases} \alpha_n^{(1)} I_n'(x_1) + b_n K_n'(x_1) = -\alpha_n^{(1)} / k, & \begin{cases} e_n^{(j)} I_n'(x_1) + c_n^{(j)} K_n'(x_1) = -\beta_n^{(j)} / k, \\ e_n^{(j)} I_n'(x_2) + c_n^{(j)} K_n'(x_2) = \gamma_n^{(j)} / k \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

с определителем $\Delta_n^1 = I_n'(x_1) \cdot K_n'(x_2) - I_n'(x_2) \cdot K_n'(x_1) \neq 0$.

Из этой системы определяем коэффициенты $a_n, b_n, e_n^{(j)}, c_n^{(j)}$.

Условия сопряжения автоматически удовлетворяются благодаря выбору его в форме (3.1) и приёму симметризации краевых условий.

В случае $r_1 \rightarrow 0$ имеем $b_n = c_n^{(j)} = 0$,

$$a_n = \alpha_n^{(2)} / (k \cdot I_n'(x_2)), \quad e_n^{(j)} = \gamma_n^{(j)} / (k \cdot I_n'(x_2)), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Имеем точное решение задачи для трёх спаянных между собой полукругов. Другой предельный случай $r_2 \rightarrow \infty$ приводит к равенствам

$$a_n = e_n^{(j)} = 0, \quad b_n = \alpha_n^{(1)} / (k \cdot K_n'(x_1)), \quad c_n^{(j)} = \beta_n^{(j)} / (k \cdot K_n'(x_1)). \quad (3.7)$$

Формулы (3.1), (3.7) определяют точное решение задачи для трёх спаянных полуплоскостей с полукруговыми вырезами.

3. *Смешанная задача.* На внутренней границе полуколец заданы краевые условия задачи Дирихле, на внешней – краевые условия задачи Неймана или наоборот. Точные решения этих задач без труда получим по предложенному методу.

4. Некоторые обобщения

1. Для N – лепестковой однородной пластинки симметризацию краевых условий, т.е. выбор вспомогательных функций (2.4), следует проводить согласно формулам

$$F(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t), \quad \varphi_j(t) = \frac{1}{N} \left[(N-1)f_j(t) - \sum_{k=1, k \neq j}^N f_k(t) \right], \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

Продолжение на полный промежуток $(-\pi, \pi)$ такое же, как и в случае трёх лепестков.

2. Для трёх разнородных по физическим свойствам лепестков (при $k=0$) первое условие сопряжения для функций остается неизменным, а условие сопряжения для производных будет таким:

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + k_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad k_j > 0. \quad (4.2)$$

Задачи Дирихле и Неймана в этом случае решаются одинаково и достаточно просто, если вспомогательные функции взять в виде

$$\begin{aligned} F &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3, \quad \lambda_j = k_j (k_1 + k_2 + k_3)^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \varphi_1 &= (\lambda_2 + \lambda_3) f_1 - \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3, \quad \varphi_2 = -\lambda_1 f_1 + (\lambda_1 + \lambda_3) f_2 - \lambda_3 f_3, \\ \varphi_3 &= -\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) f_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Как и ранее, будем иметь $f_j = F + \varphi_j$, $j = 1, 2, 3$, $k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + k_3 \varphi_3 \equiv 0$.

Благодаря последнему свойству функций (4.3) удовлетворяется условие (4.2).

В результате использования краевых условий Дирихле или Неймана получаем точное решение задачи. В случае полукруговых лепестков его можно преобразовать к интегральной форме типа Пуассона или Дини.

3. Метод без изменений можно применить к решению задач в случае задания на лепестках граничных условий третьего рода:

$$\left(\alpha u_j + \beta \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) \Big|_{\rho=R} = f_j, \quad \alpha, \beta - const.$$

4. Предлагаемым методом могут быть решены задачи для уравнения Пуассона. В этом случае симметризацией следует воспользоваться не только для краевых условий, но и для правых частей уравнения.

5. Метод распространяется на полуэллиптические многолепестковые пластины.

Пример. Кручение упругого неоднородного стержня, поперечное сечение которого есть круг, составленный из двух полукругов из различных материалов, спаянных между собой.

Задача сводится к интегрированию уравнения кручения [6]

$\Delta v_j = -2G_j$ в полукруге с номером j , $j = 1, 2$; где Δ – оператор Лапласа.

при нулевых условиях на границе круга и условиях сопряжения на линии $x = 0$,
 $v_1 = v_2$, $G_1^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + G_2^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$, G_j – модуль сдвига.

С помощью замены $u_j(x, z) = v_j(x, z) + G_j x^2$ для функций u_j будем иметь уравнение Лапласа и те же условия сопряжения, что и для функций v_j . Нулевые граничные условия для функций v_j перейдут в условия

$$u_j(R, \varphi) = \left(R^2/2\right) \cdot G_j (1 - \cos 2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Используя симметризацию краевых условий, найдём решение в рядах. После суммирования рядов решение выражается через элементарные функции:

$$u_j(\rho, \varphi) = \gamma \left(1 - \varepsilon^2 \cos 2\varphi\right) + \frac{2}{\pi} \gamma_j \left\{ \operatorname{arctg} z_s \left[1 - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \cdot (\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\varepsilon - \varepsilon^{-1}) \sin \varphi \right] - \frac{1}{2} (\varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) \sin 2\varphi \cdot \operatorname{arctg} z_c \right\}, \quad z_s = \left(2\varepsilon / (1 - \varepsilon^2)\right) \cdot \sin \varphi, \\ z_c = \left(2\varepsilon / (1 + \varepsilon^2)\right) \cdot \cos \varphi, \quad \gamma = R^2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad \gamma_1 = \frac{R^2}{2} G_1 \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2}, \\ \gamma_2 = \frac{R^2}{2} G_2 \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2}, \quad \varepsilon = \frac{\rho}{R}. \quad (4.4)$$

Эту задачу методом интегральных уравнений Мусхелишвили рассматривали авторы работ [7, 8]. При $G_1 = G_2$ из (4.4) получаем элементарное решение для однородного стержня.

5. Выводы

Предложены постановка и метод нахождения точных решений нового класса краевых задач теории поля для многолистных тонких пластин с различными типами краевых условий. Лепестки пластин представляют собой круговые полукольца. Рассмотрены случаи вырождения полуколец в полукруги и в полуплоскости с полукруговыми вырезами.

Список литературы

1. Иоссель Ю.Я. Расчёт потенциальных полей в энергетике / Ю.Я. Иоссель. – Л. : Энергия, 1978. – 351 с.
2. Дульнев Г.Н. Методы расчёта теплового режима приборов / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Радио и связь, 1990. – 312 с.
3. Бухгольц Г. Расчёт электрических и магнитных полей / Г. Бухгольц. – М. : Изд - во иностр. лит., 1961. – 712 с.
4. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.Н. Смирнов. – М. : Физматгиз, 1962. – 712 с.

5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М.: Гостехиздат, 1953. – 379 с.

6. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

7. Dumitrescu L. Torsiunea unei bare cilindrice neomogene / L. Dumitrescu, Cr. Stanescu // Studii si cercetari de mecanica aplicata. – 1957. – An. VIII. – № 1. – P. 111–114.

8. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. Г.И. Костюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 12.05.10

Розрахунок потенціального поля в тонких багатолистих пластинах, утворених із півкілець

Розглянуто новий клас задач про розрахунок потенціальних полів у тонких багатолистих пластинах, які складені з різних за фізичними властивостями кругових півкілець. Запропоновано метод знаходження точних розв'язків цих задач. В основу методу покладено спеціальний прийом симетризації граничних умов. Для пластин, складених із півкрусів, розв'язки гармонічних задач Діріхле й Неймана подано у вигляді аналогів класичних інтегралів Пуассона й Діні. Зазначено можливі узагальнення методу і його застосування до задач кручення неоднорідного стрижня.

Ключові слова: багатолисті тонкі пластини, потенціальне поле, узагальнені інтеграли Пуассона й Діні, симетризація граничних умов.

Calculation of potential fields in thin multisheet plates consisting of circular semirings

A new class of problems on the calculation of potential fields in thin multisheet plates composed of circular semirings having different physical properties is considered. A method for obtaining exact solutions of these problems is given. The method is based on a special mode of symmetrization of boundary conditions. For the plates consisting of semicircles, solutions of harmonic Dirichlet and Neumann tasks are presented by analogues of the classical Poisson and Dini integrals. Possible generalizations of the method and its application to the problem of inhomogeneous bar torsion are indicated.

Keywords: thin multisheet plates, the potential field, Poisson and Dini generalized integrals, symmetrization of the boundary conditions.