

Защемлённая по торцу упругая полуполоса с круговым отверстием или жестким круговым включением

*Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

Предложен метод решения задачи для упругой защемлённой по торцу полуполосы с круговым жестким включением. Метод базируется на формулах взаимного перераспределения решений системы уравнений Ламе в полярной и декартовой системах координат. В результате получена интегро-алгебраическая система уравнений, которая позволяет найти неизвестные коэффициенты рядов и напряжения в заделке. Исследован характер особенности нормального и касательного напряжений на торце полуполосы.

Ключевые слова: полуполоса, включение, отверстие, особенность напряжений, интегро-алгебраическая система.

Введение

Задачи теории упругости для полуполосы различными методами изучались в работах [1, 2] и приведенной в [1]. В настоящей статье предпринята попытка получить разрешающие уравнения задачи для защемлённой по торцу полуполосы с круговой неоднородностью в виде жесткого кругового включения или кругового отверстия. Впервые к решению такой задачи применён обобщённый метод Фурье [3], что позволило получить разрешающую интегро-алгебраическую бесконечную систему уравнений с таким же ядром как в [1]. Методом, отличным от того, который применён в [1], исследована особенность нормального и касательного напряжений на защемлённом конце полуполосы.

Постановка задачи

Будем предполагать, что круговая неоднородность расположена симметрично в полуполосе (рис. 1) и грани полуполосы свободны от нагрузки. Неоднородность принимаем в виде жесткой круглой шайбы, на которую действует сила P , направленная вдоль оси ox .

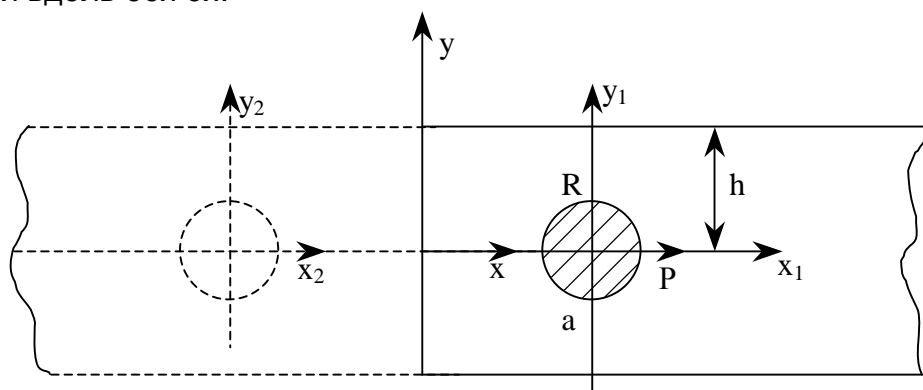


Рис. 1. Полуполоса с круговой неоднородностью

Вектор перемещения \vec{u} в полуполосе без круга должен удовлетворять уравнению равновесия Ламе

$$(1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div} \vec{u} + \Delta \vec{u} = 0,$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Граничные условия задачи таковы:

$$\vec{u} = (u, v) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (0.1)$$

$$\tau_{xy}(x, h) = \sigma_y(x, h) = 0, \quad x > 0, \quad (0.2)$$

$$\vec{u}(x, y) = u_0 \cdot \vec{e}_x \quad \text{на границе круга.} \quad (0.3)$$

В этих формулах τ_{xy}, σ_y – касательные и нормальные напряжения; \vec{e}_x, \vec{e}_y – орты декартовой системы координат; u_0 – постоянная. Замыкает постановку задачи условие конечности энергии, накопленной в полосе.

По этим данным надо определить вектор \vec{u} .

1. Метод решения

Будем считать, что величины $x, y, a, R, \vec{u}, P, \sigma_y, \tau_{xy}$ – безразмерные, т.е. $x = x^1 \cdot h^{-1}, y = y^1 \cdot h^{-1}$ и т.д.

Через \vec{u}_1 обозначим решение задачи для полуплоскости $x > 0$ при условии на границе [1]

$$\sigma_x(0, y) = \begin{cases} \sigma(y), & |y| < 1, \\ 0, & |y| > 1; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$v(0, y) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma(y)$ – неизвестная функция.

Решение этой вспомогательной задачи ищем в виде

$$\vec{u}_1 = (u_1, v_1) = G^{-1} \int_0^{\infty} B_1(\lambda) \cdot \vec{h}(x, y; \lambda) d\lambda + C \cdot \vec{e}_x, \quad (1.3)$$

где C – произвольная константа;

$$\vec{h}(x, y; \lambda) = [\vec{e}_x(\chi + \lambda x) \cos \lambda y + \vec{e}_y \cdot x \lambda \cdot \sin \lambda y] \cdot e^{-\lambda x}, \quad \chi = 3 - 4\nu;$$

G – модуль сдвига.

Вектор (1.3) удовлетворяет условию (1.2). Второе условие (1.1) приводит к равенству

$$B_1(\lambda) = \frac{\lambda^{-1}}{2\pi(\nu - 1)} \int_0^1 \sigma(t) \cos \lambda t dt. \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) с помощью интеграла [4]

$$\int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-x\lambda} \cdot \cos \lambda y d\lambda = -\gamma - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad x > 0,$$

где γ – постоянная Эйлера, находим

$$u_1 = \frac{1}{2\pi(\nu-1)} \int_0^1 \sigma(t) \left\{ -\frac{\chi}{4} \left[\ln(x^2 + (y-t)^2) + \ln(x^2 + (y+t)^2) \right] + \frac{x^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{x^2 + (y-t)^2} + \frac{1}{x^2 + (y+t)^2} \right] \right\} dt + A, \quad A = C + \frac{\gamma\chi}{2\pi(1-\nu)} \int_0^1 \sigma(t) dt = C + \frac{\gamma\chi \cdot P}{4\pi(1-\nu)}, \quad (1.5)$$

$$v_1 = \frac{x}{4\pi(\nu-1)} \int_0^1 \sigma(t) \cdot \left(\frac{y-t}{x^2 + (y-t)^2} + \frac{y+t}{x^2 + (y+t)^2} \right) dt. \quad (1.6)$$

Из (1.5) при $x = 0$ имеем

$$u_1(0, y) = \frac{\chi}{4\pi(1-\nu)} \int_0^1 \sigma(t) \ln|y^2 - t^2| dt + A. \quad (1.7)$$

С помощью (1.5), (1.6) находим напряжения $\tau_{xy}^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$, которые дает вектор \bar{u}_1 на горизонтальных сторонах полуполосы $y = \pm 1$:

$$\tau_{xy}^1(x, 1) = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{G}{2\pi(\nu-1)} \int_0^1 \sigma(t) dt \left\{ (2\nu-1) \cdot \left[\frac{1-t}{x^2 + (1-t)^2} + \frac{1+t}{x^2 + (1+t)^2} \right] - 2x^2 \left[\frac{1-t}{(x^2 + (1-t)^2)^2} + \frac{1+t}{(x^2 + (1+t)^2)^2} \right] \right\}; \quad (1.8)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 1) = \frac{2G}{1-2\nu} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = G \int_0^1 \sigma(t) dt \left\{ \frac{(1+2\nu) \cdot x}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{x^2 + (1-t)^2} + \frac{1}{x^2 + (1+t)^2} \right] + \frac{x^3}{\pi(\nu-1)} \left[\frac{1}{(x^2 + (1-t)^2)^2} + \frac{1}{(x^2 + (1+t)^2)^2} \right] \right\}. \quad (1.9)$$

Второе решение \bar{u}_2 , связанное с наличием в полуполосе круговой неоднородности, выбираем в виде

$$\bar{u}_2 = \bar{e}_x \cdot u_2 + \bar{e}_y \cdot v_2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \bar{u}_{3,n}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \bar{u}_{4,n}(x, y) + \bar{u}_{0,2}(x, y), \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_{3,n}(x, y) &= \bar{W}_{3,n}^+(x_2, y_2) + (-1)^{n+1} \bar{W}_{3,n}^+(x_1, y_1), \\ \bar{u}_{4,n}(x, y) &= \bar{W}_{4,n}^+(x_2, y_2) + (-1)^{n+1} \bar{W}_{4,n}^+(x_1, y_1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) «~» – знак комплексно сопряженной величины; (x_2, y_2) – вспомогательная система координат, симметрично расположенная относительно системы (x_1, y_1) (рис. 1); $\bar{W}_{3,n}^{\pm} = \bar{R}_{3,-n}^{\mp}$, $\bar{W}_{4,n}^{\pm} = \bar{R}_{4,-n}^{\mp}$,

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{3,n}^{\mp} &= \rho^{n-1} \cdot e^{\mp i n \varphi} (\bar{e}_{\rho} \mp i \bar{e}_{\varphi}), \quad (n \geq 1), \\ \bar{R}_{4,n}^{\mp} &= (xgrad - \chi \bar{e}_x) (2\rho^{n+1} \cdot e^{\mp i(n+1)\varphi}) + (\chi - n - 1) \cdot \bar{R}_{3,n+2}^{\mp}, \quad (n \geq -1). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$\bar{e}_{\rho}, \bar{e}_{\varphi}$ – орты полярной системы координат.

Вектор $\bar{u}_{0,2}(x, y)$ в (1.10) представлен формулой

$$\bar{u}_{0,2}(x, y) = \frac{-P}{4\pi(1+\chi)} [\bar{u}_0(\rho_1, \varphi_1) + \bar{u}_0(\rho_2, \varphi_2)], \quad (1.13)$$

где $\bar{u}_0(\rho, \varphi) = \bar{e}_{\rho}(1 - 2\chi \ln \rho) \cdot \cos \varphi + \bar{e}_{\varphi}(1 + 2\chi \ln \rho) \cdot \sin \varphi$ – решение о сосредоточенной силе [5].

Решение \bar{u}_2 удовлетворяет условиям $v_2(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = 0$ и введено для удовлетворения краевого условия (0.3).

Напряжения $\sigma_y^{(2)}(x, 1), \tau_{xy}^{(2)}(x, 1)$ на горизонтальных границах полуполосы могут быть найдены по левым частям формул (1.8), (1.9).

Приведём эти напряжения в виде, удобном для реализации метода на третьем этапе:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(2)}(x, 1) &= 4G \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \frac{\lambda^{n-1}(2\lambda - n)}{(n-2)!} \right] \times \\ &\quad \times \sin\left(\lambda a - n \frac{\pi}{2}\right) \cos \lambda x d\lambda + \tau_{xy}^{(0)}(x, 1); \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(2)}(x, 1) &= 4G \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \left[\sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \frac{\lambda^{n-1}(n-2-2\lambda)}{(n-2)!} \right] \times \\ &\quad \times \sin\left(\lambda a - n \frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda x d\lambda + \sigma_y^{(0)}(x, 1), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $\sigma_y^{(0)}$ и $\tau_{xy}^{(0)}$ – напряжения, полученные от решения (1.13);

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)}(x, 1) &= -\frac{PG}{4\pi(1-\nu)} \cdot \left[(1-2\nu) \left(\frac{x-a}{1+(x-a)^2} + \frac{x+a}{1+(x+a)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{x-a}{(1+(x-a)^2)^2} + \frac{x+a}{(1+(x+a)^2)^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\tau_{xy}^{(0)}(x, 1) = -\frac{PG}{2\pi(1+\chi)} \left[(1-\chi) \left(\frac{1}{1+(x-a)^2} + \frac{1}{1+(x+a)^2} \right) - \right.$$

$$-4 \left[\frac{(x-a)^2}{(1+(x-a)^2)^2} + \frac{(x+a)^2}{(1+(x+a)^2)^2} \right].$$

При вычислении в (1.14) и (1.15) использована формула перехода от полярных координат к декартовым

$$\frac{e^{in\varphi}}{\rho^n} = \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda(y+i\lambda x)} d\lambda, \quad y > 0, n \geq 1.$$

Третье решение для полуполосы $\bar{u}_3 = (\bar{e}_x u_3 + \bar{e}_y v_3)$ берём в виде [1]

$$\begin{aligned} \bar{u}_3(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_3(\lambda) \cdot (\bar{e}_x \cdot ch\lambda y \cdot \cos \lambda x + \bar{e}_y \cdot sh\lambda y \cdot \sin \lambda x) d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_3(\lambda) [\bar{e}_x \cdot \lambda y \cdot sh\lambda y \cdot \cos \lambda x + \bar{e}_y \cdot (\lambda y \cdot ch\lambda y - \chi \cdot sh\lambda y) \sin \lambda x] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Оно, как предыдущие два, удовлетворяет условиям $v_3(0, y) = \sigma_x^{(3)}(0, y) = 0$. Напряжения от решения \bar{u}_3 на грани $y = 1$ будут такими:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(3)}(x, 1) = & \frac{4G}{\pi} \int_0^\infty [(A_3 - (1 - 2\nu)B_3)sh\lambda + B_3\lambda \cdot ch\lambda] \cdot \lambda \cdot \cos \lambda x d\lambda; \\ \sigma_y^{(3)}(x, 1) = & \frac{4G}{\pi} \int_0^\infty [(A_3 - 2(1 - \nu)B_3)ch\lambda + B_3\lambda \cdot sh\lambda] \cdot \lambda \cdot \sin \lambda x d\lambda. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Функции $A_3(\lambda)$ и $B_3(\lambda)$, входящие в (1.18), выберем из условия равенства нулю суммарных напряжений на грани $y = 1$, т.е. из условия

$$\sum_{y=1}^3 \tau_{xy}^{(j)}(x, 1) = 0, \quad \sum_{y=1}^3 \sigma_y^{(j)}(x, 1) = 0. \quad (1.19)$$

Из этих уравнений с учётом (1.18) находим

$$\begin{aligned} [A_3 - (1 - 2\nu)B_3]sh\lambda + B_3 \cdot \lambda ch\lambda = & -\frac{\lambda^{-1}}{2G} \int_0^\infty (\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}) \cos \lambda x dx, \\ [A_3 - 2(1 - \nu)B_3]ch\lambda + B_3 \cdot \lambda sh\lambda = & -\frac{\lambda^{-1}}{2G} \int_0^\infty (\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}) \sin \lambda x dx. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Введём обозначения

$$\bar{a}_j(\lambda) = \int_0^\infty \tau_{xy}^{(j)}(x, 1) \cos \lambda x dx, \quad \bar{b}_j(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_y^{(j)}(x, 1) \sin \lambda x dx, \quad j = 0, 1, 2.$$

После вычисления интегралов получим:

$$\bar{a}_1(\lambda) = \frac{G\lambda^{-1}}{2(1-\nu)} \int_0^1 \sigma(t) \cdot [(2-2\nu-\lambda)ch\lambda t + \lambda t \cdot sh\lambda t] dt,$$

$$\bar{b}_1(\lambda) = \frac{G\lambda^{-1}}{2(1-\nu)} \int_0^1 \sigma(t) \cdot [(2\nu-1+\lambda)ch\lambda t - \lambda t \cdot sh\lambda t] dt,$$

$$\bar{a}_2(\lambda) = 4Ge^{-\lambda} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} (2\lambda - n) \right] \sin\left(\lambda a - n \frac{\pi}{2}\right) + \bar{a}_0(\lambda),$$

$$\bar{b}_2(\lambda) = 4Ge^{-\lambda} \left[\sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} (n-2-2\lambda) \right] \sin\left(\lambda a - n \frac{\pi}{2}\right) + \bar{b}_0(\lambda),$$

$$\bar{a}_0 = \mu \cdot (\mu_1 - 2) \cdot e^{-\lambda} \cdot \cos \lambda a, \quad \bar{b}_0 = \mu \cdot (1 - \nu) \cdot e^{-\lambda} \cdot \cos \lambda a, \quad \mu_1 = 2\nu + \lambda.$$

Систему (1.20) запишем в виде

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = - \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(\lambda) + \tilde{a}_2(\lambda) \\ \tilde{b}_1(\lambda) + \tilde{b}_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где \tilde{A} – матрица системы (1.20), $\tilde{a}_j(\lambda) = G^{-1} \cdot \bar{a}_j(\lambda)$, $\tilde{b}_j(\lambda) = G^{-1} \cdot \bar{b}_j(\lambda)$, $j = 0, 1, 2$.

С учётом условия статьи $\int_{-1}^1 \sigma(t) dt - P = 0$ выражения для $\tilde{a}_1(\lambda) + \tilde{a}_0(\lambda)$,

$\tilde{b}_1(\lambda) + \tilde{b}_0(\lambda)$ можно представить в виде

$$\tilde{a}_1(\lambda) + \tilde{a}_0(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{2(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \sigma(t) \cdot [(2-2\nu-\lambda)(ch\lambda t - 1) + \lambda t \cdot sh\lambda t] dt + \frac{P}{2} (2-2\nu-\lambda)(\cos \lambda a - 1) \right\},$$

$$\tilde{b}_1(\lambda) + \tilde{b}_0(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{2(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \sigma(t) \cdot [(2\nu-1+\lambda)(ch\lambda t - 1) - \lambda t \cdot sh\lambda t] dt + \frac{P}{2} (2\nu-1+\lambda)(\cos \lambda a - 1) \right\}.$$

С учётом сделанных преобразований правые части системы (1.21) будут иметь нуль второго порядка в точке $\lambda = 0$. Решением системы (1.21) будут функции $A_3(\lambda)$ и $B_3(\lambda)$, ограниченные в точке $\lambda = 0$. На основе этого делаем вывод, что все сделанные чисто формально предельные переходы к границе $x = 0$ являются справедливыми.

Итак, построенное решение

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \quad (1.22)$$

удовлетворяет краевым условиям при $x = 0$

$$v(0, y) = 0, \quad \sigma_x = \begin{cases} \sigma(y), & |y| < 1; \\ 0, & |y| > 1 \end{cases}$$

и условию (0.2). На торце $x = 0$ необходимо, чтобы решение (1.22) удовлетворяло условию

$$u_1(0, y) + u_2(0, y) + u_3(0, y) = 0, \quad |y| \leq 1.$$

Из этого условия получаем интегральное уравнение для функции $\sigma(t)$:

$$\frac{1}{2(1-v)} \left[\int_0^1 \sigma(t) \frac{\chi}{4} \ln|y^2 - t^2| + \frac{\lambda_1}{4} \ln[(2-y)^2 - t^2] - \frac{(1-t)(1-y)}{2(2-y-t)^2} - M(y, t) \right] dt +$$

$$+ A - H_1(y) \cdot P + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot E_n(y) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot H_n(y) = 0, \quad \lambda_1 = 5 - 12v + 8v^2. \quad (1.23)$$

Ядро этого уравнения такое же, как в работе [1], поэтому выписаны только главные слагаемые, несущие особенности. Выражение для гладкой части ядра $M(y, t)$ не приводим. Функции $E_n(y)$ и $H_n(y)$ будут такими:

$$E_n(y) = \frac{1}{n!} P_n(y) + X_n(y); \quad H_n(y) = \frac{1}{(n-2)!} Q_n(y) + Y_n(y);$$

$$H_1(y) = H_0(y) + \frac{1}{8} \left[\frac{a^2 - y^2}{a^2 + y^2} - \chi \ln(a^2 + y^2) \right];$$

$$H_0(y) = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda y} (\cos \lambda a - 1)}{\lambda \cdot \Delta(\lambda)} \left\{ \chi h \lambda y [2(1-v)\lambda e^\lambda - (1-2v)^2 e^\lambda + \lambda(1-2v-\lambda)e^\lambda - \right.$$

$$\left. - \chi \cdot \chi h \lambda] + \lambda y \cdot sh \lambda y [(2v-1+\lambda) \cdot e^\lambda - \chi h \lambda] \right\} d\lambda, \quad \Delta(\lambda) = \lambda + sh \lambda \cdot \chi h \lambda;$$

$$X_n(y) = 2 \frac{\cos(n+1)\psi}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}; \quad Y_n(y) = 4(n-1) \frac{[\sqrt{a^2 + y^2} \cdot \cos(n-1)\psi - a \cos n\psi]}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}};$$

$$\psi = \arctg \frac{y}{a}; \quad P_n(y) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\Delta(\lambda)} \lambda^n [R_1(y, \lambda) - R_2(y, \lambda)] \sin\left(\lambda a - \frac{n\pi}{2}\right) d\lambda;$$

$$Q_n(y) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\Delta(\lambda)} \lambda^n [(n-2-2\lambda y)R_1(y, \lambda) - (n-2\lambda y)R_2(y, \lambda)] \sin\left(\lambda a - \frac{n\pi}{2}\right) d\lambda;$$

$$R_1(y, \lambda) = \lambda y \cdot sh \lambda y \cdot sh \lambda + \chi h \lambda y ((1-2v)sh \lambda - \lambda \chi h \lambda y);$$

$$R_2(y, \lambda) = \chi h \lambda y (\lambda \cdot sh \lambda - 2(1-v)\chi h \lambda) - \lambda y \cdot sh \lambda y \cdot \chi h \lambda.$$

Остаётся удовлетворить краевому условию на границе круга.

Для этого интегральные слагаемые в решении \vec{u} надо преобразовать к полярной системе координат (ρ_1, φ_1) . Этот переход можно сделать с помощью разложения

$$e^{x+iy} = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{ik\varphi},$$

затем приравнять проекции вектора \vec{u} на орты $\vec{e}_{\rho_1}, \vec{e}_{\varphi_1}$, после чего остаётся приравнять в полученных равенствах коэффициенты при тригонометрических функциях угла φ_1 . В результате чего найдем:

$$\left\{ \begin{aligned} g_0 &= \alpha_0 + \int_0^1 \sigma(t) \cdot H_0^{(1)}(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot H_{0n}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot K_{0n}^{(1)} - P \cdot l_{01}, \quad k=0; \\ g_1 &= \alpha_1 + \int_0^1 \sigma(t) \cdot H_1^{(1)}(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot H_{1n}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot K_{1n}^{(1)} - P \cdot l_{11}; \\ A &= \beta_1 + \int_0^1 \sigma(t) \cdot H_1^{(2)}(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot H_{1n}^{(2)} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot K_{1n}^{(2)} - P \cdot l_{12}, \quad k=1; \\ g_k &= \alpha_k + \int_0^1 \sigma(t) \cdot H_k^{(1)}(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot H_{kn}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot K_{kn}^{(1)} - P \cdot l_{k1}; \\ q_k &= \beta_k + \int_0^1 \sigma(t) \cdot H_k^{(2)}(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot H_{kn}^{(2)} + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cdot K_{kn}^{(2)} - P \cdot l_{k2}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

В этой системе

$$\alpha_0 = k_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot R, \quad \alpha_1 = -\frac{R^2}{2} k_0 \left[2 - \chi \cdot \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) \right], \quad \beta_1 = u_0 + \frac{1}{2} k_0 m,$$

$$m = 2(\varepsilon_1^2 - 1) + 4\chi \ln(2aR) - \frac{3\chi\varepsilon_1^2}{2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{R}{2a}, \quad k_0 = \frac{-P}{16\pi(1-\nu)},$$

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{\chi} R^{k+1} \cdot (k-1)k_0 \cdot r_k, \quad \beta_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\chi} R^k \cdot k_{0z} \cdot r_k,$$

$$r_k = (-\varepsilon_1)^k \left(\varepsilon_1 \frac{k+1-\chi}{k+1} - \varepsilon_1^{-1} \frac{k-1+\chi}{k-1} \right), \quad k \geq 2.$$

Выражений для ядер и коэффициентов матрицы выписывать не будем в силу громоздкости, а заметим лишь, что самые сложные из них выражаются несобственными интегралами от тригонометрических и гиперболических функций, умноженных на $\Delta^{-1}(\lambda)$. Остальные вычисляются через элементарные функции.

Проведём исследование особенности напряжения $\sigma(y)$ в уравнении (1.23).

Для этого отметим, что особенность в точке $y=1$ может иметь вид $(1-y)^{-\mu}$, где

$0 < \mu < 1$. Последнее ограничение вытекает из условия конечности потенциальной энергии в полуполосе.

Интегральное уравнение (1.23) можно преобразовать к виду

$$\int_0^1 \varphi(t) \cdot \left[\frac{\chi}{4} \frac{1}{y-t} + \frac{\lambda_1}{4} \frac{1}{y+t} - \frac{t(t-y)}{2(t+y)^3} \right] dt = f(y), \quad (1.25)$$

где $\varphi(t) = \sigma(1-t)$; $f(y)$ – непрерывная на $[0,1]$ функция; $\varphi(t) \sim K \cdot t^{-\mu}$.

Вычисления интегралов даёт ($y \rightarrow 0$):

$$I_1(y) = \int_0^1 \frac{t^{-\mu}}{y-t} dt = -y^{-\mu} \cdot \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi(\mu-1) + O(1),$$

$$I_2(y) = \int_0^1 \frac{t^{-\mu}}{y+t} dt = y^{-\mu} \frac{\pi}{\sin \pi(1-\mu)} + O(1),$$

$$I_3(y) = \int_0^1 \frac{t^{1-\mu}(t-y)}{(t+y)^3} dt = y^{-\mu} \frac{\pi(1-\mu)^2}{\sin \pi\mu} + O(1).$$

Подстановка их в (1.25) даёт уравнение для μ :

$$\chi \cdot \cos \pi(1-\mu) + \lambda_1 - 2(1-\mu)^2 = 0, \quad (1.26)$$

которое с точностью до линейной замены $\mu = 1 - s$ совпадает с уравнением, полученным в [1] другим методом.

Уравнение (1.26) при любом $0 < y < 1$ имеет действительный корень $\mu \in (0,1)$.

Таким образом, напряжение $\sigma_x(0, y)$ в крайних точках $y = \pm 1$ имеет интегрируемые особенности. Такой же вывод имеет место и для касательного напряжения $\tau_{xy}(0, y)$.

Для решения интегро-алгебраической системы (1.23), (1.24) интеграл в ней заменяют подходящей квадратурной формулой, учитывающей наличие особенности у неизвестной функции, и, таким образом, сводят её к алгебраической системе с бесконечным числом неизвестных. Последняя может быть решена методом усечения.

Постоянная u_0 , которая войдёт в окончательное решение, находится из условия равновесия полуполосы

$$\int_{-1}^1 \sigma(t) dt - P = 0.$$

2. Выводы

1. Предложен метод решения задачи для упругой полуполосы с жестким круговым включением, расположенным на оси симметрии упругого тела.

2. Задача сведена к интегро-алгебраической системе уравнений относительно нормального напряжения в заделке и коэффициентов рядов Фурье решения упругой задачи вне круга.

3. Строго доказано, что особенность нормальных и касательных напряжений в угловых точках полуполосы с круговой неоднородностью такая же, как и в полосе без включения.

4. Метод можно без существенных изменений применить к случаю кругового отверстия в полуполосе.

Список литературы

1. Ворович И. И. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы / И. И. Ворович, В. В. Копасенко // ПММ. – 1966. – Т. 30. – Вып. 1. – С. 109 – 115.

2. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы / В. В. Лобода // ПММ. – 1986. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 263 – 270.

3. Проценко В.С. Деякі співвідношення між розв'язками рівнянь Ламе в декартових, параболічних та еліптичних координатах / В.С. Проценко, О.І. Соловійов // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1985. – № 4. – С. 37 – 39.

4. Брычков Ю. А. Интегральные преобразования обобщённых функций / Ю. А. Брычков А. П. Прудников. – М. : Наука, 1977. – 288 с.

5. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г. И. Костюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 07.04.10

Пружна півсмуга, яку зацімлено по торцю, з круговим отвором або жорстким круговим включенням

Запропоновано метод розв'язання задачі для пружної смуги з круговим жорстким включенням. Півсмугу закріплено по торцю. В основу методу покладено формули взаємного перерозкладення розв'язків системи рівнянь Ламе в полярній і декартовій системах координат. Одержано інтегро-алгебраїчну систему рівнянь, яка дає можливість знайти невідомі коефіцієнти рядів і напруження на закріпленому торці. Досліджено характер особливості нормального й дотичного напружень на торці півсмуги.

Ключові слова: півсмуга, включення, отвір, особливість напружень, інтегро-алгебраїчна система.

Fixed on the butt elastic half-strip with a circular hole or rigid circular inclusion

Method of solution of the problem for elastic fixed on the butt half-strip with a rigid circular inclusion is proposed. The method is based on the formulas of mutual re-expansion of solutions of Lamé system of equations in polar and Cartesian coordinates. An integro-algebraic equation system, which permits to find unknown coefficients of series and tension on the fixed edge, is obtained. The nature of the normal and tangent tensions on the butt of the half-strip is investigated.

Keywords: half-strip, circular inclusion, hole, feature of tensions, integro-algebraic system.