

К вопросу о корректности расчета траектории движения точки в поле скоростей вихря

Научно-производственное объединение "АВИА"

Рассмотрена проблема расчета траектории движения точки в поле скоростей вихря. Получены соотношения, позволяющие оценить относительную погрешность расчета траектории при интегрировании уравнений движения по методу Эйлера в поле умеренных и интенсивных скоростей вихря. Предложен способ корректного расчета траектории движения точки в поле больших градиентов скоростей. Решена обратная задача динамики движения, в которой интегрирование осуществляется не по времени, а по заданному расстоянию. Приведены результаты расчета модельных задач определения траектории движения точки в поле скоростей одного и четырех вихрей. Показан пример неустойчивого расчета траектории движения точки в зависимости от начальных условий интегрирования.

Ключевые слова: поле скоростей вихря, траектория движения точки, интегрирование по заданному расстоянию

1. Введение

При решении задач гидро- и электродинамики с точки зрения поведения динамической системы важно знать, как перемещается система частиц или вихрей в поле скоростей. Применительно к двумерным течениям жидкости в рамках нестационарной постановки задачи расчет положения вихрей осуществляется интегрированием уравнений движения методом Эйлера [1]. Во многом это связано с тем, что численные методы развивались в эпоху ограниченных вычислительных мощностей ЭВМ. В то же время для детального моделирования течения необходимо оперировать большим числом вихрей, количество которых постоянно возрастает в процессе расчета.

Тем не менее вопрос о корректности расчета траектории движения частиц или вихрей остается актуальным, поскольку применяемый численный метод должен обеспечивать заданную точность расчета и, в частности, при решении модельных задач. К ним относится задача о движении пары вихрей в неограниченном пространстве, у которых одинаковая величина и направление циркуляции скорости, классическая задача Кельвина о движении трех [2, 3], четырех [4] и системы вихрей и их коллапса [5]. Автору не известны работы, в которых бы приводилось численное решение указанных задач, но которые имеют решение в квадратурах.

Современные вычислительные возможности позволяют применить метод Рунге-Кутты для интегрирования уравнений движения точки, находящейся в поле скоростей вихря. Так, в работах [6, 7] описаны основные положения такого подхода к решению задачи, а в [8] приведены некоторые результаты численного моделирования двумерного течения. Однако применение такого подхода ограничивается, с одной стороны, значительным возрастанием времени расчета, а с другой – сложностью интегрирования больших градиентов или скачков скорости. Наиболее сложной остается задача расчета траектории движения точки при ее взаимодействии с преградой, имеющей сложные геометрические очертания. Все это приводит к необходимости разработки эффективных способов и алгоритмов решения описанной задачи.

2. Постановка задачи и способ ее решения

Выполним оценку точности расчёта траектории движения точки в заданном поле скоростей.

Пусть имеется точечный вихрь. Тогда индуцируемое им поле скоростей в плоскости, перпендикулярной оси вихря, определяется выражением

$$\vec{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (1)$$

Согласно (1), поле скоростей от бесконечного вихря представляет собой окружности, в точках которой вектор скорости направлен по касательной.

Рассмотрим точку А (т. А), занимающую положение 1 и отстоящую от оси вихря на расстоянии r_1 (см. рис. 1). За время Δt (1) точка из положения 1 переместится по окружности в положение 1'. Путь, пройденный точкой, составляет $s_1 = v_1 \cdot \Delta t$, что соответствует углу дуги окружности, по которой двигалась точка:

$$\varphi_1 = \frac{s_1}{r_1} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r_1}. \quad (2)$$

За следующий отрезок времени Δt т. А из положения 1' переместится в положение 1'', пройдя путь $s'_1 = s_1$ и, соответственно, $\varphi'_1 = \varphi_1$ (рис. 1).

Таким образом, при перемещении точки согласно (1) посредством аналитического интегрирования данного уравнения получается, что траектория движения есть окружность радиуса r и в каждой точке траектории модуль вектора скорости постоянен и направлен по касательной к окружности.

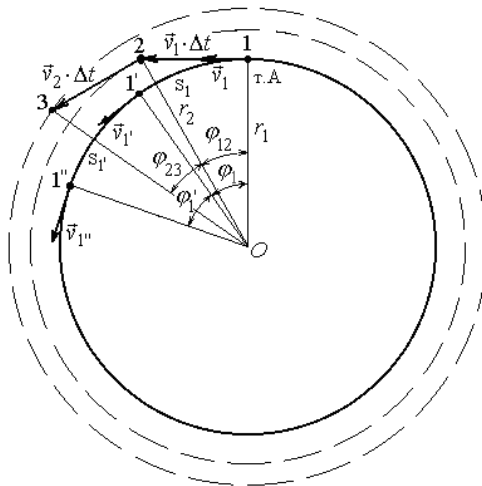


Рис. 1. Траектория движения точки в поле скоростей вихря

Рассмотрим задачу построения траектории движения точки при условии интегрирования (1) по методу Эйлера. В этом случае т. А из положения 1 переместится в положение 2 (см. рис. 1). Удаление от оси вихря

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + (v_1 \cdot \Delta t)^2}, \quad (3)$$

а угол между положениями 1 и 2

$$\varphi_{12} = \operatorname{arctg} \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r_1}. \quad (4)$$

Анализируя (2) – (4) и рис.1, получаем, что

$$r_2 > r_1, \quad \varphi_{12} < \varphi_1. \quad (5)$$

Выполним 2-й шаг интегрирования. В положении 2 точка имеет скорость, согласно (1), v_2 , которая меньше v_1 по условию (5). Следовательно, перемещение составит $s_2 = v_2 \cdot \Delta t < s_1$ и точка займёт положение 3, и т.д.

В результате получаем, что при интегрировании (1) по методу Эйлера траектория точки будет выглядеть в виде расходящейся спирали, скорость которой постоянно уменьшается (см. рис. 2).

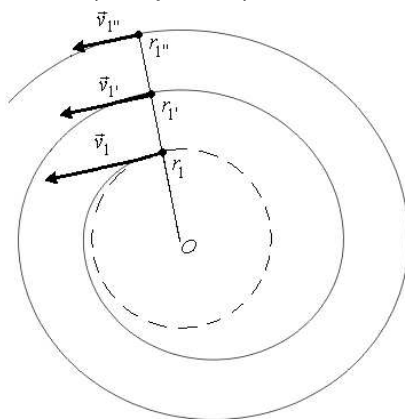


Рис. 2. Траектория движения точки по расходящейся спирали

Оценим погрешность расчета траектории для рассматриваемого случая.

Пусть т. А в положении 1 имеет скорость v_1 . Тогда за время Δt точка должна занять положение 1' (см. рис. 3). При численном интегрировании (1) по методу Эйлера т. А перемещается в положение 2. Ошибка перемещения определяется величиной расстояния $d \neq 0$ и углом $\delta \neq 0$.

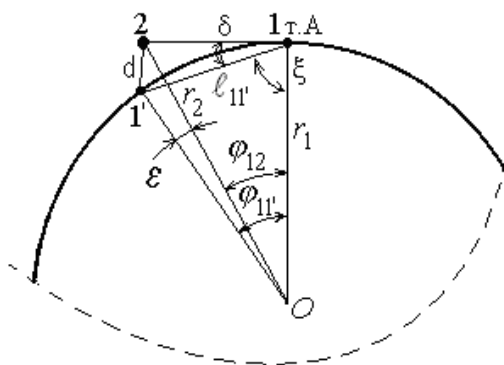


Рис. 3. К определению ошибки перемещения точки

По всей видимости, относительную погрешность перемещения т. А можно оценить как

$$\Delta = \frac{d}{s_1}; \quad D_y = \frac{\delta}{\varphi_{11'}}. \quad (6)$$

На основании рис. 3 можно записать, что

$$y_{11'} = \frac{s_1}{r_1} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r_1},$$

$$\varphi_{12} = \arctg \frac{s_1}{r_1} = \arctg \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r_1}, \quad (7)$$

тогда

$$\varepsilon = \varphi_{11} - \varphi_{12}. \quad (8)$$

Величины r_2 и δ определяются выражениями

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + (v_1 \cdot \Delta t)^2},$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \xi, \quad (9)$$

при

$$o = \frac{p}{2} - \frac{y_{11'}}{2}. \quad (10)$$

Выполнив преобразования с учетом (7), (9) и (10), получаем

$$\delta = \frac{\varphi_{11'}}{2} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{2r_1}. \quad (11)$$

Определим величину d ошибки перемещения точки согласно соотношению

$$d^2 = l_{11'}^2 + s_1^2 - 2 \cdot l_{11'} \cdot s_1 \cdot \cos \delta, \quad (12)$$

где

$$l_{11'} = 2 \cdot r_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_{11'}}{2}\right).$$

Относительные погрешности перемещения Δ и угла отклонения $\Delta\varphi$ с учётом соотношений (11) – (12) и заменой функций \sin и \cos степенным рядом до величин второго порядка малости запишем как

$$\Delta = \frac{\sqrt{\left(2r_1 \cdot \sin \frac{\varphi_{11'}}{2}\right)^2 + (v_1 \cdot \Delta t)^2 - 2 \cdot 2r_1 \cdot \sin \frac{\varphi_{11'}}{2} \cdot v_1 \Delta t \cdot \cos \frac{\varphi_{11'}}{2}}{v_1 \Delta t} =$$

$$= \sqrt{\frac{(r_1 \cdot \varphi_{11'})^2 + (v_1 \Delta t)^2 - 2r_1 \cdot \varphi_{11'} \cdot v_1 \Delta t \left(1 - \frac{\varphi_{11'}^2}{2!}\right)}{(v_1 \Delta t)^2}}$$

$$= \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r_1} = \varphi_{11'} = \frac{\Gamma \Delta t}{2\pi r_1^2} = \frac{2\pi \cdot v_1^2 \cdot \Delta t}{\Gamma} = \frac{2\pi \cdot s \cdot v_1}{\Gamma} = O\left(\frac{\Delta t}{r_1^2}\right) = O(s \cdot v)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} = 0,5 = const. \quad (13)$$

Из (13) следует вывод о том, что относительная погрешность угла отклонения траектории точки есть величина постоянная и не зависит от каких-либо параметров. Относительная погрешность отклонения траектории точки при её криволинейном движении определяется величиной шага интегрирования Δt и обратно пропорциональна квадрату радиуса кривизны r^2 или прямо пропорциональна линейной скорости v и расстоянию s , на которое переместилась точка за время Δt . Таким образом, относительная погрешность отклонения траектории точки тем больше, чем ближе она располагается к оси вихря.

Из анализа (13) следует, что относительную погрешность отклонения траектории точки можно уменьшить, если задаться величиной перемещения точки s' , которое удовлетворяет соотношению:

$$s' = v \cdot \Delta t' \leq s = v \cdot \Delta t. \quad (14)$$

Таким образом, определение пространственного положения т. А осуществляется решением обратной задачи динамики движения, в которой интегрирование осуществляется не по времени, а по заданному расстоянию. В этом случае, задавшись заведомо малым расстоянием s' , и при известной скорости v_1 находим требуемое время $\Delta t'$ для перемещения т. А на s' из положения 1 в положение 2'. Значения параметров в т. 2' будут следующими:

$$\Delta t' = s' / v_1, \quad \vec{r}_2' = \vec{r}_1 + v_1 \cdot \Delta t'. \quad (15)$$

Конечное положение т. А определяется при выполнении условий

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \sum_{i=1}^n \vec{v}'_i + \vec{v}_n \cdot \Delta t'', & s &= \sum_{i=1}^n s'_i + v_n \cdot \Delta t'', \\ \Delta t &= \sum_{i=1}^n \Delta t'_i + \Delta t'', & \Delta t'' &= \sum_{i=1}^{n+1} \Delta t'_i - \Delta t, \end{aligned} \quad (16)$$

где n - количество шагов суммирования времени.

Оценку погрешности перемещения т. А в данном случае удобно выполнить на основании результатов численного эксперимента на ряде модельных задач.

3. Апробация методики. Примеры расчета модельных задач

На основании изложенного выше способа определения пространственного положения точки при ее движении в поле скоростей от вихря был выполнен ряд расчетов при характерных начальных положениях точки и совокупности вихрей с различной их интенсивностью.

Все расчеты проведены в безразмерных величинах при следующих условиях. Шаг интегрирования по времени в методе Эйлера (назовем его методом dt) составлял $\Delta t = 0,1$. Шаг перемещения точки на заданное дискретное расстояние (назовем его методом dl) составлял соответственно $dl = 0,02; 0,05; 0,1$. Общее число шагов по времени в расчетах равнялось 60.

В первой модельной задаче рассчитывали траекторию движения точки в поле вихря, отстоящей от его оси на единичном расстоянии с координатами (1, 0). Скорость, индуцируемая вихрем в данной точке, задавалась также единичной. Из аналитического решения (1) следует, что т. А за 60 шагов перемещается по окружности на расстояние в 6 единиц и поворачивается на угол 344° . На рис. 4 показаны рассчитанные траектории перемещения т. А для оговоренных выше условий интегрирования.

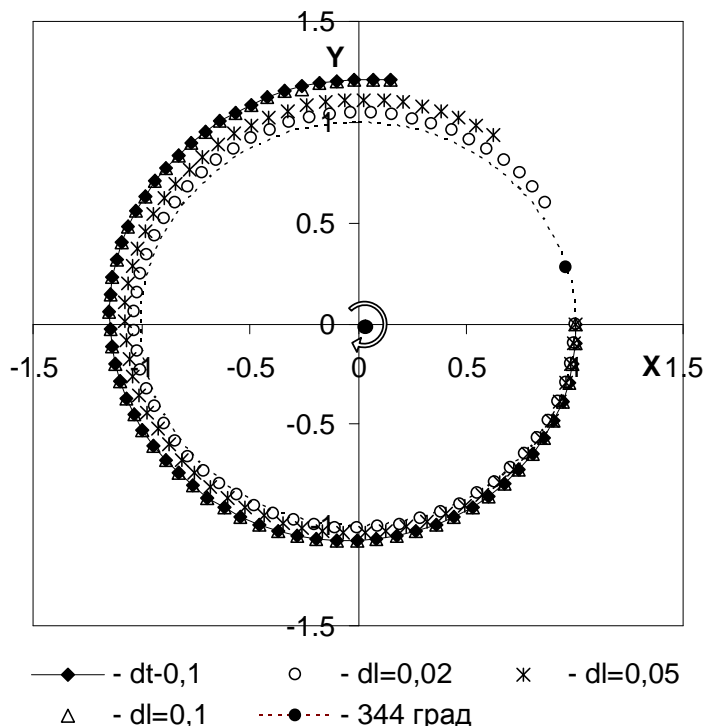


Рис. 4. Траектории движения точки в зависимости от условий интегрирования

В таблице 1 приведены обобщенные результаты расчета траекторий точки за 60 шагов интегрирования.

Таблица 1

Параметры	Точное решение	Метод dt	Метод dl		
			0,02	0,05	0,1
Расстояние	6	5,38	5,84	5,63	5,38
Угол поворота, град	344	279	324	296	279
Количество шагов интегрирования за шаг Dt	-	1	5	2	1
Относительная погрешность расчета расстояния, %	-	10,3	2,7	6,2	10,3

Из анализа полученных результатов следует, что при нахождении т. А в поле умеренных скоростей $v \leq 1$ абсолютная ошибка интегрирования даже по методу Эйлера накапливается медленно и приемлема при выполнении расчетов на 20-30 шагов с соотношением $v / Dt > 10$. Результаты, полученные по

предложенной методике, позволяют подтвердить работоспособность алгоритма, а при $dl = dt$ (и только когда $\nu = 1$) результаты совпадают с результатами, полученными по стандартному способу перемещения точки.

Во второй модельной задаче исследована траектория движения т. А при попадании её в поле интенсивных скоростей вихря $\nu \gg 1$. Начальные данные и условия расчета являются такими же, как и в первой модельной задаче, за исключением $\nu_1 = 16$. На рис. 5 показана траектория движения т. А. Видно, что при построении траектории по методу dt на первых шагах интегрирования под влиянием большой линейной скорости происходит "выброс" т. А на значительное расстояние относительно точной (аналитической) траектории. Дальнейшее интегрирование движения т. А приводит к тому, что траектория имеет ярко выраженный спиральный вид (аналогично рис. 2), поскольку существенно изменились величины и направления переменных ν и r .

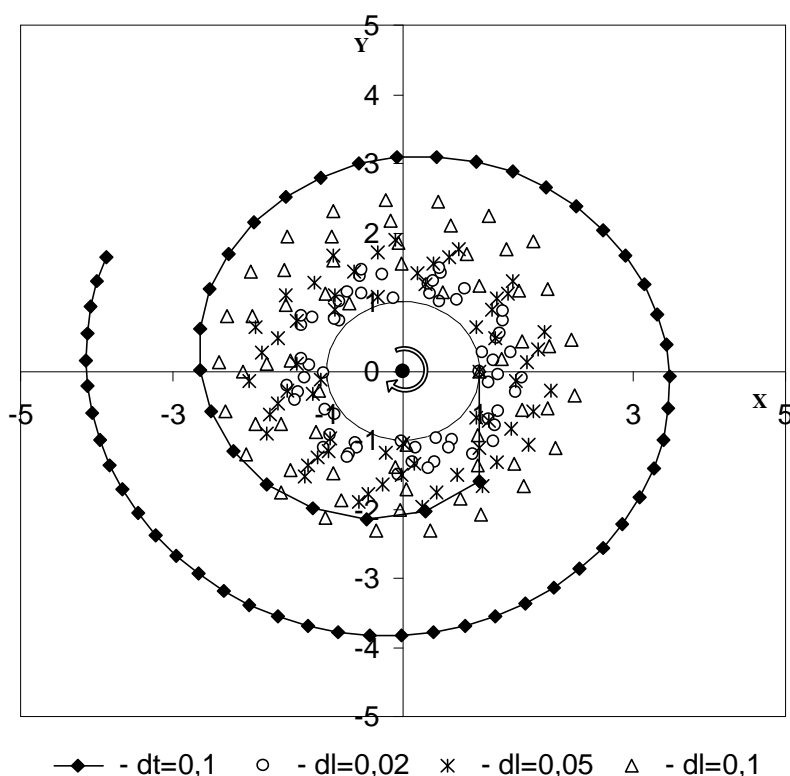


Рис. 5. Траектории движения точки в поле интенсивных скоростей в зависимости от условий интегрирования

При расчете динамики движения т. А по методу dl получаем траектории принципиально другие. Согласно сути предложенного метода после перемещения т. А на заданное расстояние dl , независимо от того, какая при этом скорость т. А, что принципиально отличается от метода dt , в новом положении вновь рассчитывают направление и величину вектора скорости. Такой подход позволяет более точно отследить градиент изменения вектора скорости на плоскости, а следовательно, и построение траектории. На рис. 6 показаны первые шесть шагов расчета, которые подтверждают правомерность приведенных рассуждений.

В третьей модельной задаче моделируется поле скоростей, индуцированное четырьмя вихрями, расположенными в узлах с координатами

$(\pm 1, \pm 1)$, а начальному положению т. А соответствуют координаты $(0, 1)$. Интенсивности вихрей и их направление вращения показаны на рис. 7 и выбирались из условия "удержания" т. А на кольцевой траектории вокруг 2-го вихря. Противодействию такому "удержанию" т. А способствуют все остальные вихри. Однако в силу значительной интенсивности 2-го вихря такое "удержание" должно иметь место.

Исследовано влияние параметра dt на расчет траектории движения. С этой целью были выполнены расчеты со значениями $dt=0,02$ и $0,1$ на 200 шагов. Из анализа траекторий следует (см. рис. 8), что уменьшение значения времени интегрирования в пять раз не изменило принципиально форму траектории частицы, т.е. процесс "удержания" т. А на кольцевой траектории не выполнен, в то время как метод dl данную задачу решает.

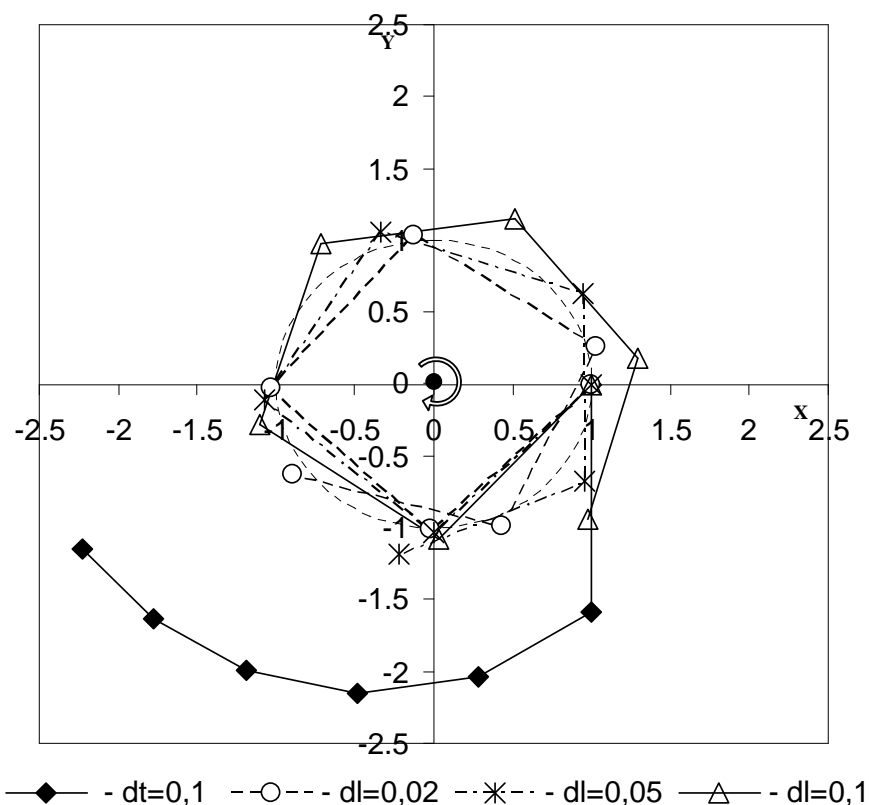


Рис. 6. Первые шесть шагов расчета траектории точки при различных условиях интегрирования

Расчеты показали, что "удержание" вторым вихрем т. А выполняется при интегрировании траектории по методу dl с шагом $0,02$. Во всех остальных случаях в процессе решения происходит "захват" т. А четвертым вихрем. Данные траектории являются следствием неустойчивости решения задачи динамики движения точки. По своей сути такая модельная задача относится к классу однопараметрических задач определения бифуркационного значения Dt , при котором решение переходит из одного состояния в другое [9].

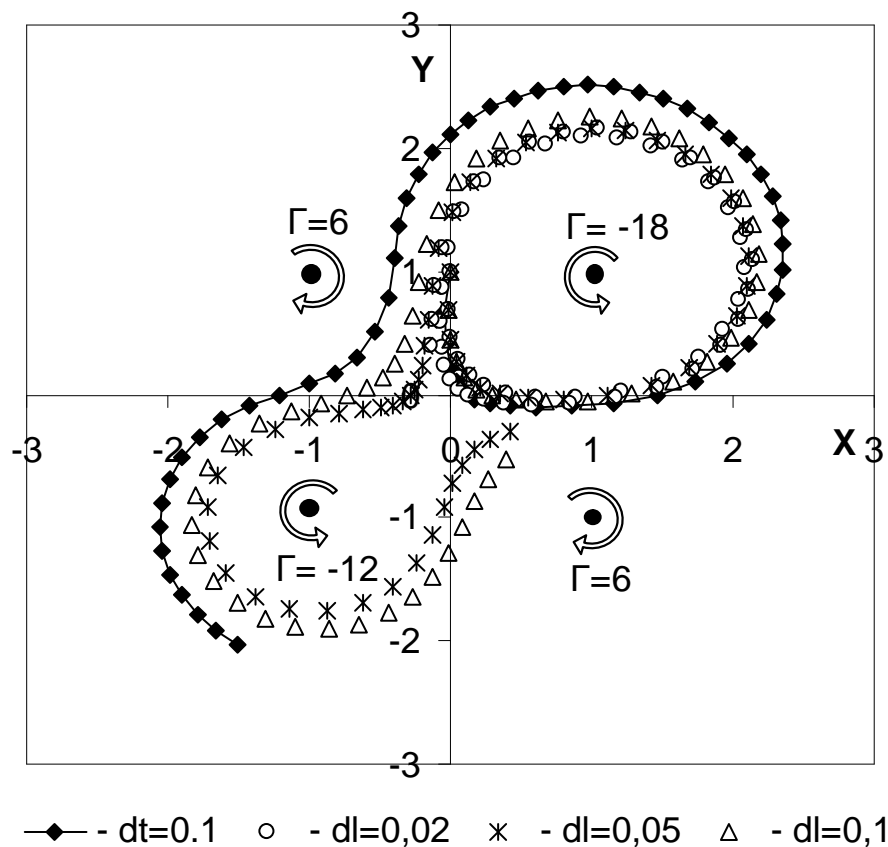


Рис. 7. Траектории точки в поле четырех вихрей за 60 шагов расчета

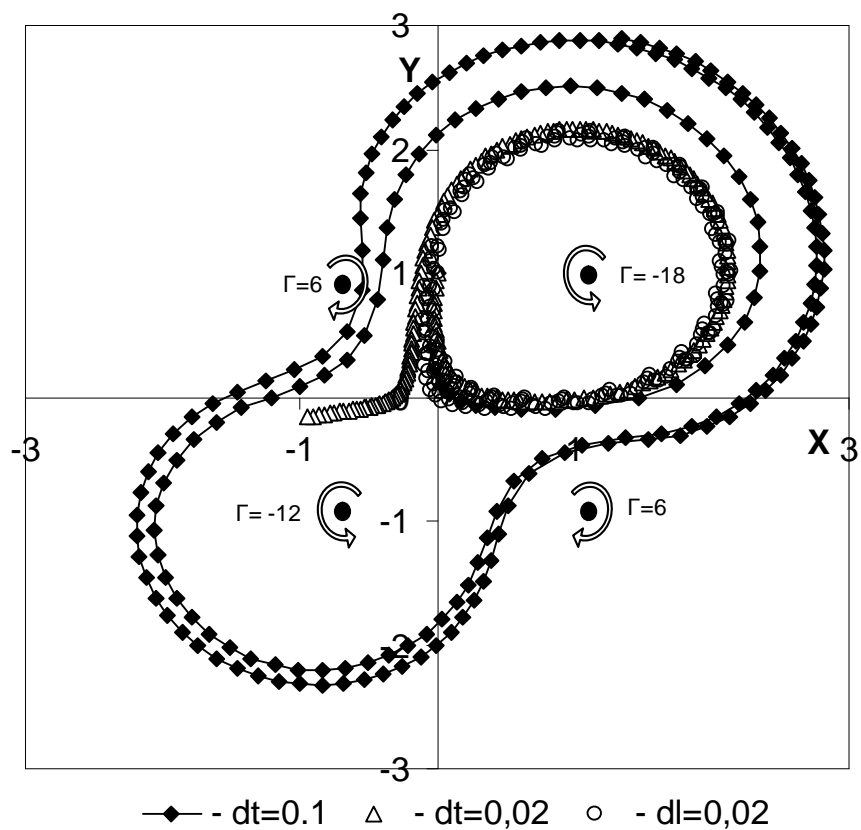


Рис. 8. Траектории точки в поле четырех вихрей за 200 шагов расчета

Выводы

1. При расчете траектории движения точки в поле скоростей вихря по методу Эйлера относительная погрешность отклонения траектории определяется величиной шага интегрирования Δt и обратно пропорциональна квадрату радиуса кривизны r^2 или прямо пропорциональна линейной скорости v и расстоянию s , на которое переместилась точка за время Δt . Таким образом, относительная погрешность отклонения траектории точки тем больше, чем ближе она располагается к оси вихря.

2. Относительную погрешность отклонения траектории точки можно уменьшить, если решать обратную задачу динамики движения, в которой интегрирование осуществляется не по времени, а по заданному расстоянию.

3. Предложен способ корректного расчета траектории движения точки в поле интенсивных скоростей и при наличии больших градиентов скорости.

4. Точность расчета траектории движения по предлагаемому способу зависит от величины заданного дискретного расстояния, которое целесообразно выбирать в 5-10 раз меньшим, чем шаг времени интегрирования.

5. Предложенный способ расчета траектории движения точки может быть распространен и на трехмерные задачи.

Список литературы

1. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). - М.: ТОО «Янус», 1995. - 520 с.

2. Kelvin. Mathematics and Physics. Papers, 4. Cambridge, 1910, - 135 p.

3. Новиков Е.А. Динамика и статистика системы вихрей // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – М.: Наука, - Т. 65. - Вып. 5, - 1975. – С. 1868-1882

4. Новиков Е.А. Стохастические свойства системы четырех вихрей. / Е.А. Новиков, Ю.Б. Седов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – М.: Наука, - Т. 75. - Вып. 3(9). 1978. – С. 868-876

5. Новиков Е.А. Коллапс вихрей / Е.А. Новиков, Ю.Б. Седов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – М.: Наука, - Т. 77. - Вып. 2(8), 1979. – С. 588-597

6. Дворак А.В. Дискретные гидродинамические особенности. Формулы для безразмерных скоростей, потенциалов и их производных // Научно-методические материалы по численным методам. - М.: ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1985. - С. 85-106

7. Дворак А.В. Аналитические выражения для производных скорости и определение траекторий жидких частиц в плоских задачах гидродинамики // Научно-методические материалы по численным методам.- М.: ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1985. - С. 27-33

8. Орловский М.М. Визначення траєкторій рідких частинок в нестационарних двовимірних задачах аерогідродинаміки / М.М. Орловський, В.О. Удовенко // Збірник наукових праць. - Х.: ХІЛ ВПС. - 1999. - Вип.1. - С. 83-88

9. Арнольд В.И. Теория катастроф. -М.: Наука, 1990, - 128 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., начальник кафедры, С.А. Калкаманов, Харьковский университет воздушных сил Украины.

Поступила в редакцию

До питання про коректність розрахунку траєкторії руху точки в полі швидкостей вихору

Розглянуто проблему розрахунку траєкторії руху точки в полі швидкостей вихору. Отримано співвідношення, що дозволяють оцінити відносну похибку розрахунку траєкторії при інтегруванні рівнянь руху за методом Ейлера в полі помірних та інтенсивних швидкостей вихору. Запропоновано спосіб коректного розрахунку траєкторії руху точки в полі великих градієнтів швидкостей. Вирішено зворотна задача динаміки руху, в якій інтегрування здійснюється не за часом, а за заданою відстанню. Наведено результати розрахунку модельних задач з визначення траєкторії руху точки в полі швидкостей одного і чотирьох вихорів. Наведено приклад нестійкого розрахунку траєкторії руху точки залежно від початкових умов інтегрування.

Ключові слова: поле швидкостей вихору, траєкторія руху точки, інтегрування за заданою відстанню.

To a question on a correctness of calculation of a trajectory movements of a point in the field of speeds of a vortex

The problem of calculation of a trajectory of movement of a point in the field of speeds of a whirlwind is considered. The parities are received, allowing estimating a relative error of calculation of a trajectory at integration of the equations of movement on Euler's method in the field of the moderate and intensive speeds of a whirlwind. The way of correct calculation of a trajectory of movement of a point in the field of the big gradients of speeds is offered. The return problem of dynamics of movement in which integration is carried out not on time and on the set distance dares. Results of calculation of modeling problems by definition of a trajectory of movement of a point in the field of speeds of one and four whirlwinds are resulted. The example of unstable calculation of a trajectory of movement of a point, depending on integration entry conditions is resulted.

Keywords: a field of speeds of a whirlwind, a trajectory of movement of a point, integration on the set distance.