УДК 681.321

В.М. Вартанян, Ю.А. Романенков,
В.Ю. Кащеева, Д.С. Ревенко

Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания для статистических рядов интервальных данных

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Предложены и обоснованы необходимые алгебраические условия применимости классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования временных рядов с интервальными данными, основанные на использовании билинейного конформного преобразования и теореме Харитонова о робастной устойчивости интервальных полиномов. Даны практические рекомендации по выбору настроечного параметра модели – константы сглаживания, основанные на ретроспективном анализе. Предложенный подход проиллюстрирован примером.

Ключевые слова: прогнозирование, экспоненциальное сглаживание, параметрический синтез, билинейное преобразование, интервальный полином.

Введение. Для прогнозирования различных показателей технико-экономических систем и процессов в настоящее время существует большое количество методов, разнообразие которых определяется характером исходных данных и степенью их точности [1]. Большое распространение в силу своей простоты, а также возможности параметрического синтеза получил метод экспоненциального сглаживания, который позволяет прогнозировать значение параметра в последующий момент времени.

Расчетная формула метода

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \qquad (1)$$

где F_t – прогноз на момент времени t;

α – константа сглаживания;

$A_{t-(i+1)}$ – дискретные значения исходного временного ряда в моменты времени $t-(i+1)$, $i=1..n$;

n – длина ряда.

Зависимость (1) может иметь такой вид:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha(1-\alpha)A_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 A_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^3 A_{t-4} + ... + \alpha(1-\alpha)^n A_{t-n}. \qquad (2)$$

Во многих практических задачах некоторые или все значения исходного ряда характеризуются неопределенностью, которая может быть выражена в интервальной форме

$$[A_i] = [\underline{A_i}; \overline{A_i}], \qquad (3)$$

где $\underline{A_i}$ и $\overline{A_i}$ – нижняя и верхняя границы интервального параметра A_i.

Таким образом, для прогноза ряда интервальных данных имеем

$$[F_t] = \alpha[A_{t-1}] + \alpha(1-\alpha)[A_{t-2}] + \alpha(1-\alpha)^2[A_{t-3}] + \alpha(1-\alpha)^3[A_{t-4}] + ... + \\ + \alpha(1-\alpha)^n [A_{t-n}]. \qquad (4)$$

Выбору константы сглаживания α посвящен ряд публикаций. Общепринятой областью ее возможных значений является интервал $\alpha \in [0;\ 1]$, хотя некоторые авторы допускают ее изменение в более широких пределах.

Постановка проблемы. Будем считать выбор параметра α обоснованным, если на интервале [0; 1] отыщется хотя бы одно значение α, при котором может быть получен один или несколько ретроспективных прогнозов абсолютной точности [2].

Другими словами, если среди корней интервального полиномиального уравнения

$$[A_{t-1}] = \alpha[A_{t-2}] + \alpha(1-\alpha)[A_{t-3}] + \alpha(1-\alpha)^2[A_{t-4}] + \alpha(1-\alpha)^3[A_{t-5}] + \\ + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{n-1}[A_{t-n}] \tag{5}$$

существует хотя бы один вещественный корень в интервале [0; 1], то применение классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования такого интервального ряда обосновано. Таким образом, возникает задача поиска необходимых условий нахождения корней интервального уравнения (5) в заданной области.

Подход к решению. Предлагаем следующий метод анализа расположения корней интервального полиномиального уравнения.

Разобьем плоскость комплексного в общем случае параметра α на две области: область G_1 – круг единичного диаметра с центром в точке (0,5; 0) и область G_2 – все остальные точки комплексной плоскости (рис. 1).

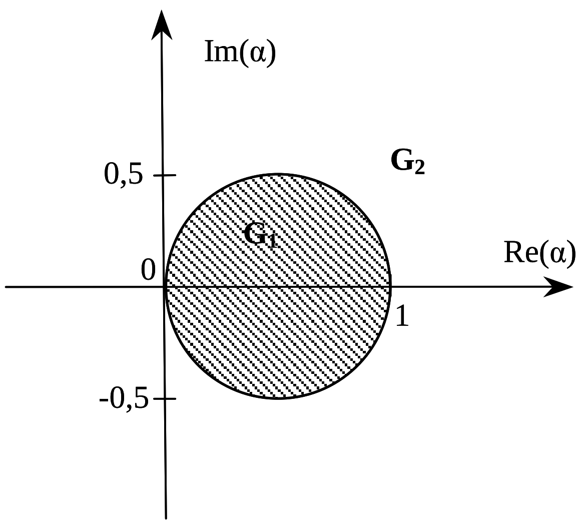

Рис. 1. Разбиение плоскости комплексного параметра α

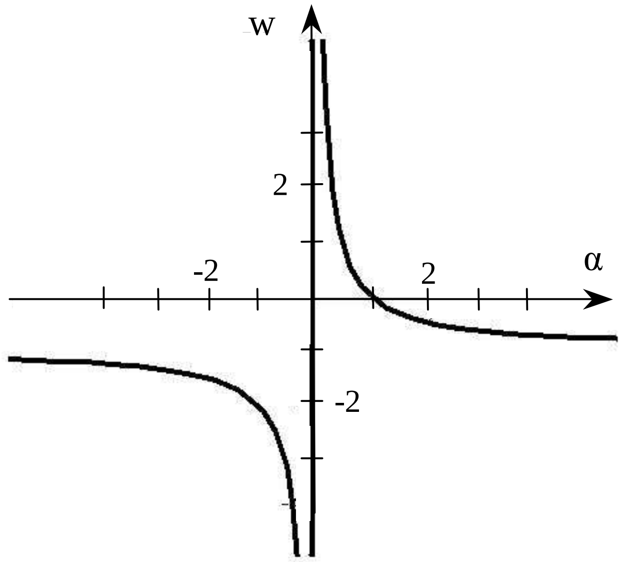

Рис. 2. График функции $w = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$

Используя билинейное w-преобразование, которое отображает круг единичного радиуса в плоскости Z во всю левую полуплоскость плоскости W

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \tag{6}$$

получим формулу преобразования области G_1 в правую полуплоскость комплексной плоскости W:

$$\alpha = \frac{1}{1+w}, \; w = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{7}$$

Из рис. 2 видно, что (7) преобразует область G_2 плоскости α в левую полуплоскость комплексной плоскости W.

После подстановки уравнение (5) примет вид

$$[A_{t\text{-}1}] = \frac{1}{1+w}[A_{t-2}] + \frac{w}{(1+w)^2}[A_{t-3}] + \frac{w^2}{(1+w)^3}[A_{t-4}] + \\ + \frac{w^3}{(1+w)^2}[A_{t-5}] + \ldots + \frac{w^{n-1}}{(1+w)^n}[A_{t-n}] \tag{8}$$

или

$$-(1+w)^n [A_{t\text{-}1}] + (1+w)^{n-1}[A_{t-2}] + w(1+w)^{n-2}[A_{t-3}] + \\ + w^2(1-w)^{n-3}[A_{t-4}] + w^3(1+w)^{n-4}[A_{t-5}] + \ldots + w^{n-1}[A_{t-n}] = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) можно свести к стандартному виду

$$[b_0]w^n + [b_1]w^{n-1} + [b_2]w^{n-2} + \ldots + [b_{n-1}]w + [b_n] = 0, \tag{10}$$

где интервальные коэффициенты $[b_i] = [\underline{b_i}; \overline{b_i}]$ есть вычисляемые линейные функции от значений исходного ряда $[A_i]$.

Рассмотрим условия нахождения корней интервального полинома (10) в левой полуплоскости комплексной плоскости W. Согласно теореме Харитонова [3], интервальный полином устойчив (т.е. все корни полинома с интервальными коэффициентами лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат вне зависимости от сочетаний значений коэффициентов), если устойчивы четыре характерных полинома с детерминированными коэффициентами:

$$\begin{aligned} D_1(w) &= \underline{b_0}w^k + \underline{b_1}w^{k-1} + \overline{b_2}w^{k-2} + \overline{b_3}w^{k-3} + \ldots + \underline{b_{k-1}}w + \underline{b_k}, \\ D_2(w) &= \underline{b_0}w^k + \overline{b_1}w^{k-1} + \overline{b_2}w^{k-2} + \underline{b_3}w^{k-3} + \ldots + \underline{b_{k-1}}w + \overline{b_k}, \\ D_3(w) &= \overline{b_0}w^k + \overline{b_1}w^{k-1} + \underline{b_2}w^{k-2} + \underline{b_3}w^{k-3} + \ldots + \overline{b_{k-1}}w + \overline{b_k}, \\ D_4(w) &= \overline{b_0}w^k + \underline{b_1}w^{k-1} + \underline{b_2}w^{k-2} + \overline{b_3}w^{k-3} + \ldots + \overline{b_{k-1}}w + \underline{b_k}. \end{aligned} \tag{11}$$

Если все полиномы Харитонова (11) окажутся гурвицевыми, то все корни интервального уравнения (10) лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат при любом сочетании значений коэффициентов, а, следовательно, все корни уравнения (5) находятся в области G_2. В случае же негурвицевости хотя бы одного из полиномов Харитонова хотя бы один из корней уравнения (5) находится в области G_1. Проверка полиномов Харитонова на гурвицевость может быть выполнена с помощью любого алгебраического критерия устойчивости. Наиболее уместным, с практической точки зрения, представляется применение обобщенного критерия Рауса, который позволяет не только установить факт неустойчивости полинома, но и определить число корней, находящихся в правой полуплоскости (что соответствует числу корней уравнения (5) на интервале [0; 1]).

Таким образом, необходимым условием применимости классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования ряда интервальных данных является негурвицевость хотя бы одного из полиномов Харитонова, полученных с помощью билинейного преобразования интервального ретроспективного полинома.

При выполнении сформулированного необходимого условия применимости классического метода экспоненциального сглаживания предложена процедура выбора α на отрезке [0; 1]. Идея состоит в том, что, убедившись в нахождении корней интервального уравнения (5) в области G_1, можно и дальше дробить область G_1 на более мелкие, проверяя наличие в них корней.

Проиллюстрируем предложенный подход графически. Пусть для интервального ряда (3) необходимое условие применимости классического метода экспоненциального сглаживания выполняется, т.е. область G_1 содержит корни интервального уравнения (5).

Расположим в области G_1 m кругов (для определенности $m = 10$) диаметром m^{-1} таким образом, чтобы они содержали в себе весь отрезок вещественной оси [0; 1], (рис. 3).

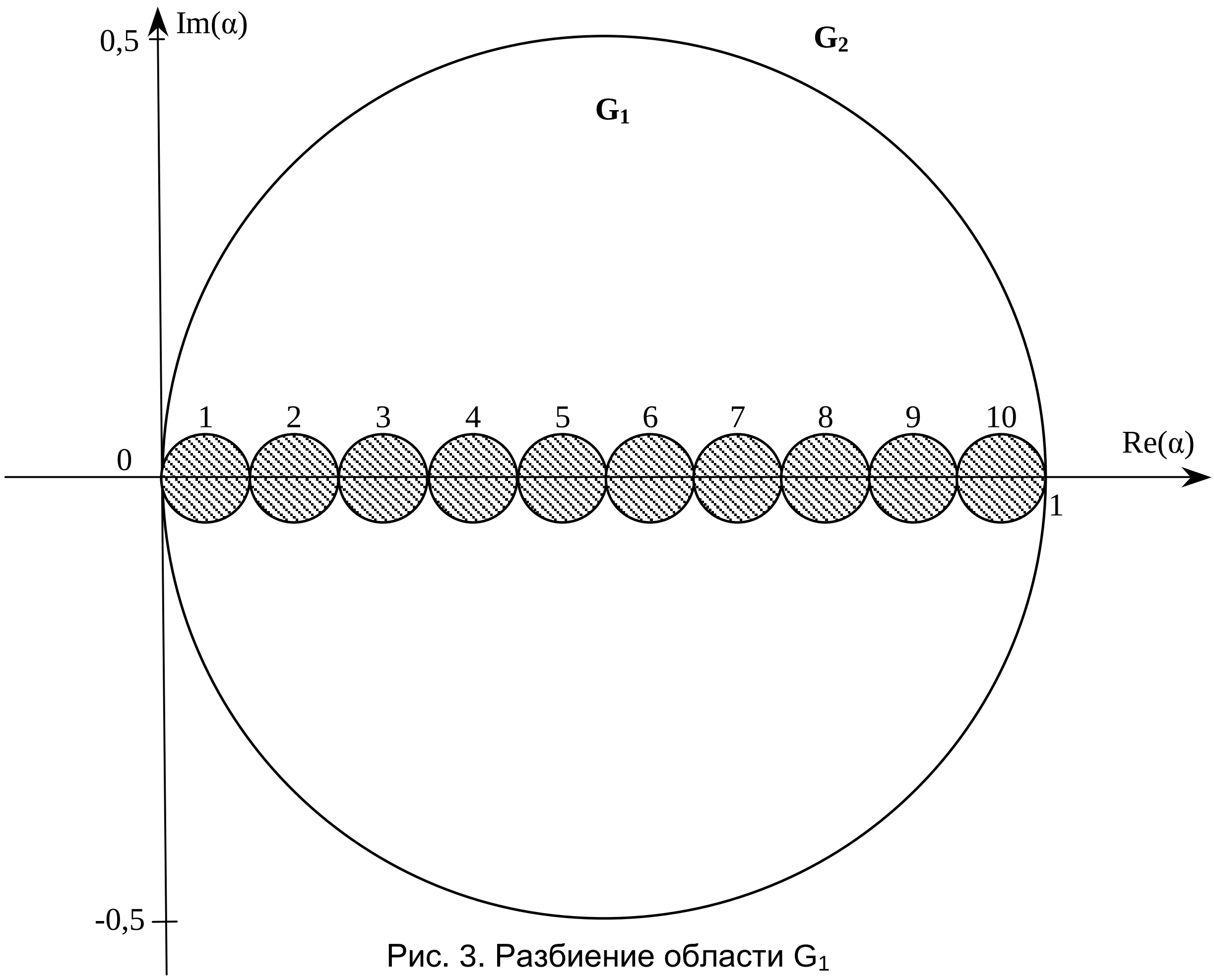

Рис. 3. Разбиение области G_1

Используем для каждого круга полученное из (7) преобразование

$$\alpha = \frac{i + w(i-1)}{m(1+w)}, \qquad (12)$$

где $i = 1...m$ – порядковый номер малого круга.

Проверяя изложенным выше способом факт наличия корней интервального уравнения (5) внутри каждого из m кругов, можно отсечь отрезки на интервале [0, 1], где корни (5) не могут появиться ни при каких сочетаниях значений коэффициентов интервального уравнения. В общем случае после разбиения можно получить один из трех вариантов расположения корней (рис. 4). Здесь заштрихованный круг содержит корни, а незаштрихованный – нет.

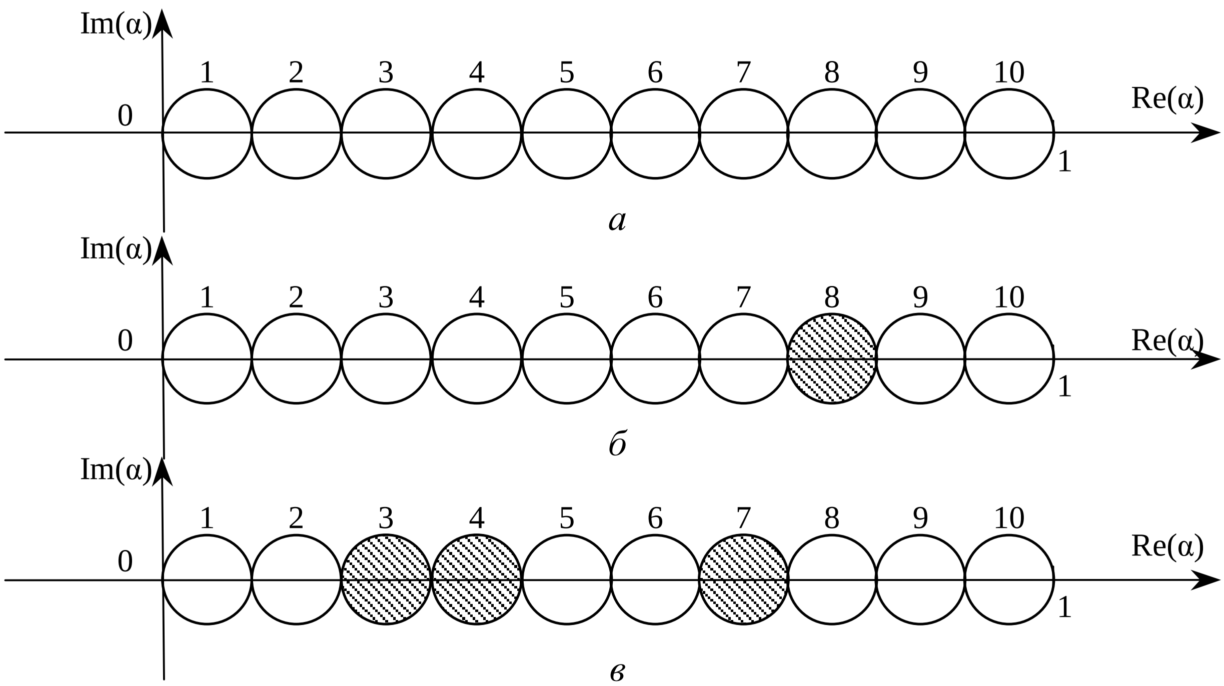

Рис. 4. Локализация корней в окрестности отрезка [0; 1]

Ситуация, изображенная на рис. 4,а, соответствует расположению комплексных корней внутри области G_1, но не вблизи вещественной оси, что означает неприменимость для прогнозирования исходного интервального ряда классического метода экспоненциального сглаживания.

Рис. 4,б иллюстрирует ситуацию, при которой корни локализованы внутри одного круга диаметром m^{-1}, причем мнимая составляющая корня $Im(\alpha) \le (2m)^{-1}$, что существенно приближает его к вещественной оси и фактически может служить мерой точности метода. В данном случае возможно последующее дробление выявленного круга по предложенному выше принципу в целях уточнения искомого значения α. Так как все процедуры при проверке расположения корней не представляют существенной вычислительной сложности, уточнение расположения корней ограничено лишь видом корневого годографа.

И, наконец, рис. 4,в соответствует случаю, когда в области вещественной оси на интервале [0; 1] находятся несколько корней. В данном случае дальнейшее дробление интервала представляется нецелесообразным и результатом являются несколько отрезков внутри интервала [0; 1], внутри которых можно обоснованно выбирать значения α для прогнозирования.

Пример. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим методологический пример 2-го порядка.

Пусть известен короткий временной ряд интервальных данных, показанный на рис. 5.

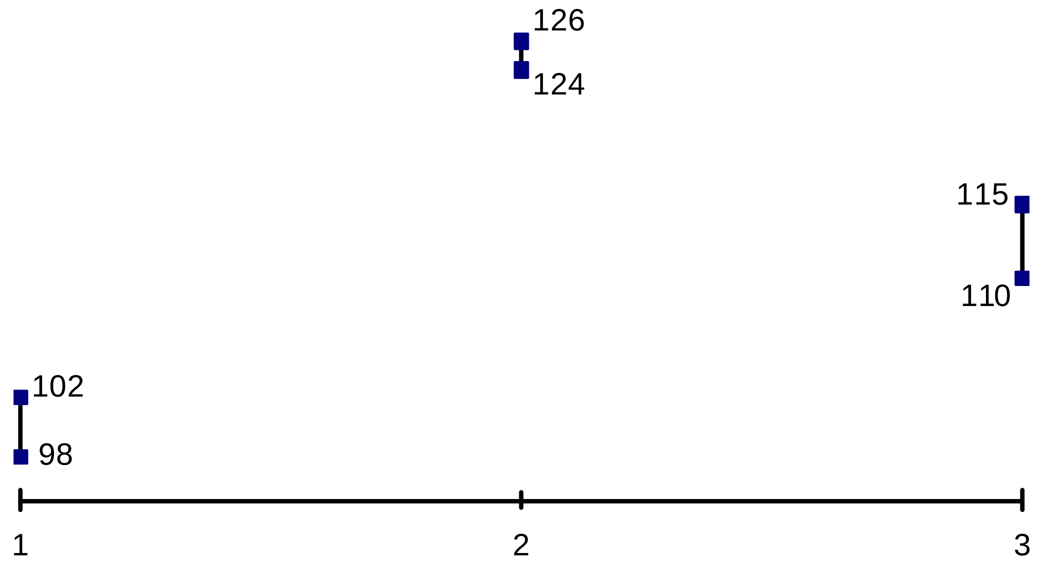

Рис. 5. Временной ряд интервальных данных

Ретроспективное уравнение (5) для последнего значения параметра примет вид

$$A_3 = -A_1\alpha^2 + (A_1 + A_2)\alpha,$$

или после подстановки

$$\alpha = \frac{1}{1+w},$$

$$A_3 = -\frac{A_1}{(1+w)^2} + \frac{A_1 + A_2}{(1+w)}.$$

Домножим обе части на $(1+w)^2$:

$$-A_3 w^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)w + A_2 - A_3 = 0.$$

Коэффициенты интервального уравнения относительно w:

$$[b_0]w^2 + [b_1]w + [b_2] = 0,$$

$$[b_0] = -[A_3] = [-115, -110],$$

$$[b_1] = [A_1] + [A_2] - 2[A_3] = [-10, 8],$$

$$[b_2] = [A_2] - [A_3] = [7, 16].$$

Полиномы Харитонова:

$$D_1(w) = -115w^2 - 10w + 16,$$

$$D_2(w) = -115w^2 + 8w + 16,$$

$$D_3(w) = -110w^2 + 8w + 7,$$

$$D_4(w) = -110w^2 - 10w + 7.$$

Согласно критерию Рауса для устойчивости уравнения второго порядка необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты полинома были одного знака, что в данном случае не выполняется. Следовательно, на интервале [0; 1] существуют корни уравнения (5). Причем согласно обобщенному критерию Рауса этих корней ровно столько, сколько смен знака у коэффициентов полинома (в данном случае один).

Разобьем окрестность отрезка [0; 1] на 10 частей путем подстановки в уравнение (5)

$$\alpha = \frac{i + w(i-1)}{10(1+w)},$$

где $i = 1...10$ – порядковый номер малого круга.

$$A_3 = -A_1\frac{(i + w(i-1))^2}{100(1+w)^2} + (A_1 + A_2)\frac{i + w(i-1)}{10(1+w)},$$

$$(-10A_2 - 11A_1 + 12iA_1 - i^2A_1 + 10iA_2 - 100A_3)w^2 +$$

$$+(-2i^2A_1 + 20iA_1 + 20iA_2 + 2A_1 - 200A_3)w +$$

$$+10A_2 + 10iA_2 + 8iA_1 - i^2A_1 + 9A_1 - 100A_3 = 0,$$

$$[b_0] = -10[A_2] - 11[A_1] + 12i[A_1] - i^2[A_1] + 10i[A_2] - 100[A_3],$$

$$[b_1] = -2i^2[A_1] + 20i[A_1] + 20i[A_2] + 2[A_1] - 200[A_3],$$

$$[b_2] = 10[A_2] + 10i[A_2] + 8i[A_1] - i^2[A_1] + 9[A_1] - 100[A_3].$$

Значения коэффициентов $[b_i]$ для десяти малых кругов сведены в таблицу.

Значения коэффициентов $[b_i]$ для десяти малых кругов

i	$[b_0]$	$[b_1]$	$[b_2]$
1	$[-115,-110]$	$[-18560,-17440]$	$[-6848,-5852]$
2	$[-9378,-8822]$	$[-14708,-13492]$	$[-5722,-5078]$
3	$[-7452,-6848]$	$[-11248,-9952]$	$[-4188,-3512]$
4	$[-5722,-5078]$	$[-8180,-6820]$	$[-2850,-2150]$
5	$[-4188,-3512]$	$[-5504,-4096]$	$[-1708,-992]$
6	$[-2850,-2150]$	$[-3220,-1780]$	$[-762,-38]$
7	$[-1708,-992]$	$[-1328,128]$	$[-12,712]$
8	$[-762,-38]$	$[172,1628]$	$[542,1258]$
9	$[-12,712]$	$[1280,2720]$	$[900,1600]$
10	$[542,1258]$	$[1996,3404]$	$[1018,1782]$

Нетрудно видеть, что коэффициенты интервального уравнения (10) для седьмого, восьмого и девятого малых кругов меняют знак, что означает нахождение корня интервального уравнения (5) на отрезке [0,6; 0,9].

Для геометрической иллюстрации примера построим семейство кривых, описываемых интервальным уравнением

$$P(\alpha) = -[A_1]\alpha^2 + ([A_1] + [A_2])\alpha - [A_3]\,.$$

Очевидно, что семейство ограничено всего двумя стационарными полиномами (рис. 6):

$$\underline{P}(\alpha) = -\overline{A_1}\alpha^2 + (\underline{A_1} + \underline{A_2})\alpha - \overline{A_3}\,,$$

$$\overline{P}(\alpha) = -\underline{A_1}\alpha^2 + (\overline{A_1} + \overline{A_2})\alpha - \underline{A_3}\,.$$

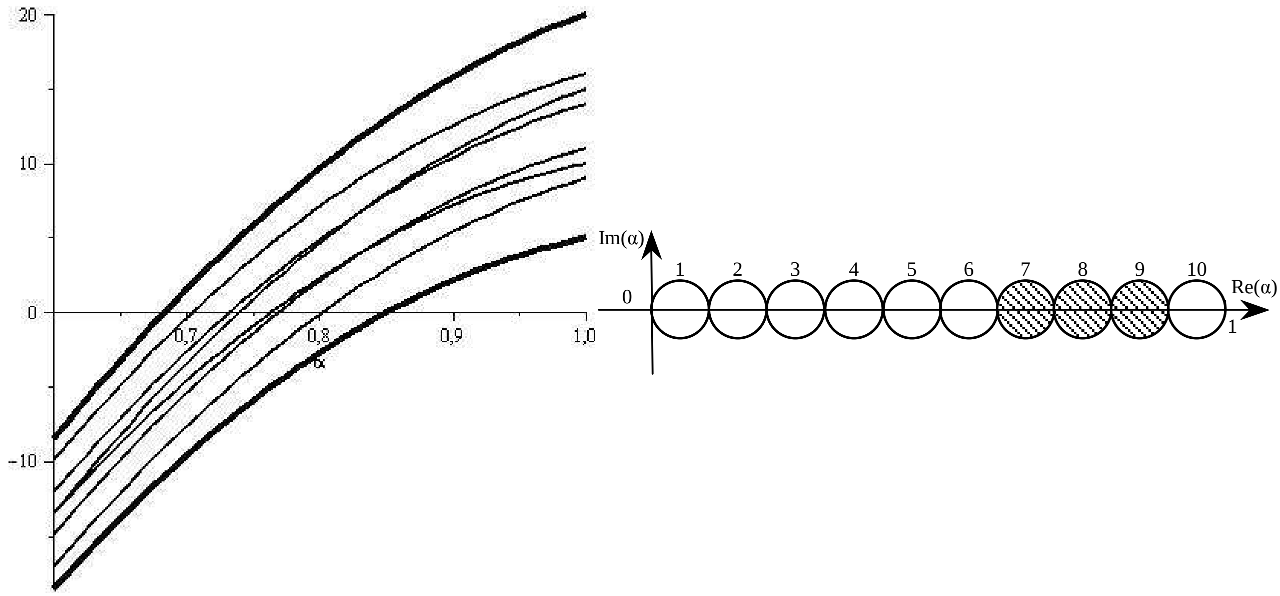

Рис. 6. График интервального полинома на интервале [0,6; 0,9]

Графически можно определить, что корень интервального уравнения лежит на отрезке [0,67; 0,85], что подтверждает результат, полученный аналитически с помощью предложенного подхода.

Выводы

Таким образом, получены следующие результаты:

1. Предложены и обоснованы необходимые условия применимости классического метода экспоненциального сглаживания для прогнозирования временных рядов с интервальными данными, основанные на использовании билинейного конформного преобразования и теореме Харитонова о робастной устойчивости интервальных полиномов.
2. Даны практические рекомендации по параметрическому синтезу модели экспоненциального сглаживания, основанные на ретроспективном анализе временного ряда.
3. Предложенный подход проиллюстрирован примером.

Список литературы

1. Вартанян В.М. Сбор и анализ методов прогнозирования динамических процессов с неопределенными данными / В.М. Вартанян, Д.С. Ревенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ». – Вып.41. – Х., 2009. – С. 177-182.

2. Вартанян В.М. Модель, метод и инструментальные средства интервального прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания для случая неопределенности данных / В.М. Вартанян, Д.С. Ревенко // Радиоэлектронные и компьютерные системы: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ».– Вып. № 5(39). – Х., 2009. – С. 16-19.

3. Жабко А.П. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов / А.П. Жабко, В.Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 10. – С. 125-134.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. В.П. Божко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 16.12.09

Параметричний синтез моделі експоненціального згладжування для статистичних рядів інтервальних даних

Запропоновано і обґрунтовано необхідні алгебричні умови придатності класичного методу експоненціального згладжування для прогнозування часових рядів з інтервальними даними, основані на використанні білінійного конформного перетворення й теореми Харитонова про робастну стійкість інтервальних поліномів. Дано практичні рекомендації щодо вибору настроювального параметра моделі - константи згладжування, основані на ретроспективному аналізі. Запропонований підхід проілюстровано прикладом.

Ключові слова: прогнозування, експоненціальне згладжування, параметричний синтез, білінійне перетворення, інтервальний поліном.

Parametric synthesis of model of the exponential smoothing out for the statistical interval data rows

Necessary algebraic conditions of applicability of a classical method of exponential smoothing for forecasting of time rows with the interval data, based on use of bilinear conformal transformations and Haritonov’s theorem of robust stability of interval polynomials are offered and proved. Practical recommendations for choosing the adjusting parameter of model – the constant of smoothing are made. They are based on the retrospective analysis. The offered method is illustrated by an example.

Keywords: forecasting, exponential smoothing, Parametric synthesis, bilinear transformation, interval polynomial.