УДК 62-501.72:519.6 С.В. Левин

Метод последовательного квадратичного программирования в оптимальном управлении MISO-объектами

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Задача оптимального управления MISO-объектом сформулирована в виде задачи квадратичного программирования и решена методом множителей Лагранжа. Дана геометрическая интерпретация.
Ключевые слова: оптимальное управление, квадратичное программирование

Введение

Существенной особенностью многих практических задач управления является наличие ограничений-неравенств на входные (управляемые и неуправляемые) воздействия и выходные переменные, возникающих из-за ограниченных возможностей оборудования либо порождаемых методикой или целями управления.

В работе [1] предложен метод управления с обратной связью, применимый для MISO-объектов (несколько входов, один выход) при ограничениях типа двойных неравенств на управляющие переменные. Задача управления с критерием наименьших модулей на каждом такте решена как задача линейного программирования (ЛП). В работе [2] описана методика, лишенная недостатков ЛП-подхода, отмеченных в [1], основным из которых является неопределенное время решения ЛП-задачи традиционными методами, и позволяющая заранее определять максимальное время решения, укладываться в соответствующий такт управления и, следовательно, применять ЛП-подход в реальном масштабе времени при жестких временных ограничениях.

Постановка задачи

В работе [2] приведена формулировка задачи оптимального адаптивного управления MISO-объектом на каждом такте управления в виде следующей задачи математического программирования с функцией цели, сформулированной в соответствии с критерием наименьших модулей:

$$Z=\sum_{i=1}^{k}\xi_i\left|\Delta x_i\left(N-1\right)\right|\rightarrow min,$$

$$\begin{cases} A_i\left(N-1\right)\le \Delta x_i\left(N-1\right)\le B_i\left(N-1\right), i=\overline{1,k}, \\ \Delta y\left(N\right)=\sum_{i=1}^{k}a_i^*\left(N\right)\Delta x_i\left(N-1\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где k – количество управляющих входов объекта;

$\Delta x_i\left(N-1\right)$ – компоненты вектора управления, вычисляемого и подаваемого на объект на текущем такте;

N – номер следующего такта управления;

A_i, B_i – пределы изменения управляющих воздействий;

$\Delta y(N)$ – рассогласование между желаемым и спрогнозированным значениями выхода объекта на N-м такте;

ξ_i – весовые коэффициенты управляющих воздействий;

$a_i^*(N)$ – оценки параметров линейной регрессионной модели объекта управления для следующего такта.

Целью данной статьи является формулировка подхода к решению задачи управления MISO-объектом применительно к квадратичному критерию оптимальности управления при ограничениях типа двойных неравенств на управляющие переменные. В этом случае задачу (1) перепишем в виде следующей задачи квадратичного программирования (КП):

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i x_i \right)^2 \rightarrow min,$$

$$\begin{cases} A_i \le x_i \le B_i, \quad или \quad x \in D, \\ \Delta y = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i = b. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь для упрощения записи привязка к номерам тактов и знаки Δ перед управляемыми переменными опущены, и дальнейшее рассмотрение ведется по умолчанию для текущего (N-1)-го такта, а под переменными подразумеваются их приращения, которые и будут компонентами вектора управления.

Решение КП-задачи методом множителей Лагранжа

Функция Лагранжа для задачи (2) имеет следующий вид:

$$\Psi(X, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i x_i \right)^2 + \lambda \left(b - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \right). \tag{3}$$

Согласно [3] оптимальное решение задачи (2)

$$Z = \min_{x \in D} \max_{\lambda > 0} \Psi(X, \lambda). \tag{4}$$

По теореме Куна-Такера

$$Z = \max_{\lambda > 0} \min_{x \in D} \Psi(X, \lambda). \tag{5}$$

Подставив функцию Лагранжа (3) в выражение (5), получим

$$Z = \max_{\lambda > 0} \left(\min_{x \in D} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i x_i \right)^2 + \lambda b - \sum_{i=1}^{k} \lambda a_i x_i \right) \right). \tag{6}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i x_i - \frac{\lambda a_i}{2\xi_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i^2 x_i^2 - x_i\lambda a_i + \frac{\lambda^2 a_i^2}{4\xi_i^2}\right), \quad (7)$$

то выражение (6) приводим к следующему виду:

$$Z = \max_{\lambda>0}\left(\min_{x\in D}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i x_i - \frac{\lambda a_i}{2\xi_i}\right)^2 + \lambda b - \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda^2 a_i^2}{4\xi_i^2}\right)\right). \quad (8)$$

Очевидно, что для минимума в области D необходимо выполнение равенства

$$\xi_i x_i = \frac{\lambda a_i}{2\xi_i}. \quad (9)$$

Тогда

$$Z = \max_{\lambda>0}\left(\lambda b - \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda^2 a_i^2}{4\xi_i^2}\right). \quad (10)$$

Из необходимого условия максимума

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = b - \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda a_i^2}{2\xi_i^2} = 0 \quad (11)$$

получим

$$\lambda = \frac{b}{\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^2}{2\xi_i^2}} \quad (12)$$

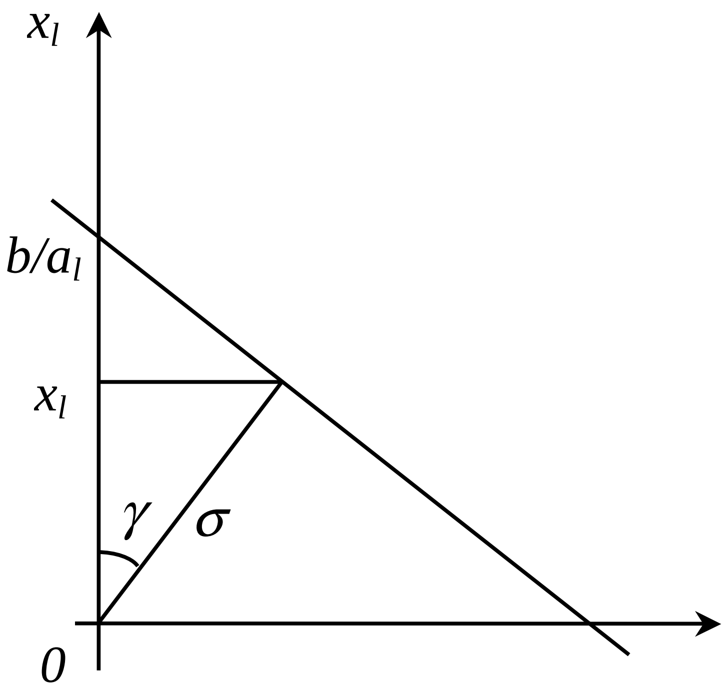
Подставив (12) в (9), запишем выражение для компонентов вектора управления:

$$x_l = \frac{b a_l}{\xi_l^2 \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^2}{\xi_i^2}}, \quad l = \overline{1,k}. \quad (13)$$

Геометрическая интерпретация оптимального решения задачи (2) показана на рисунке.

Оптимальным решением задачи (2) для одинаковых весовых коэффициентов являются координаты точки пересечения гиперплоскости, определяемой ограничением-равенством, и перпендикуляра, опущенного на нее из начала координат. Длину перпендикуляра из точки на плоскость находят из следующего выражения [4]:

$$\sigma^2 = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}. \quad (14)$$



Геометрическая интерпретация оптимального решения

Для всех x_l, $l = \overline{1,k}$, как $cos\,\gamma$:

$$\frac{\sigma}{b/a_l} = \frac{x_l}{\sigma}. \qquad (15)$$

Выделив x_l из (15), с учетом выражения (14) получим

$$x_l = \frac{ba_l}{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}, \qquad (16)$$

что совпадает с выражением (13) для одинаковых весовых коэффициентов.

Заключение

Очевидно, что решение (13) может в общем случае и не удовлетворять всем ограничениям на управление. В этом случае «запредельные» переменные необходимо последовательно по одной обрезать до соответствующего предела, исключать из задачи (2), и снова решать эту задачу. Порядок исключения таких переменных логично организовать в соответствии с их весовыми коэффициентами. Например, первыми исключать поднимаемые до нижнего предела переменные с максимальными весами и обрезаемые до верхнего предела переменные с минимальными весами. Общий алгоритм такого исключения требует дополнительного исследования.

Список литературы

1. Chang T.S. A linear programming approach for multivariable feedback control with inequality constraints / T.S. Chang, D.E. Seborg //Int. J. Control. – 1983 / – Vol. 37, No. 3. – p. 583-597.

2. Левин С.В. Оптимальное управление линейными MISO-объектами с применением методов линейного программирования / С.В. Левин // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 40. – Х., 2008. – С. 145-149.

3. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М: Наука, 1967. – 460 с.

4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М: Наука, 1984. – 832 с.

Рецензент: к. т. н. , доцент И.В. Шевченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 14.12.09

Метод послідовного квадратичного програмування в оптимальном керуванні MISO-об'єктами

Задачу оптимального керування MISO-об'єктом сформульовано у вигляді задачі квадратичного програмування і розв'язано методом множників Лагранжа. Надано геометричну інтерпретацію.

Ключові слова: оптимальне керування, квадратичне програмування

Sequential quadratic programming method in MISO-object optimum control

The problem of optimum control determination for MISO-object is formulated as a quadratic programming problem and solved using Lagrange multipliers method. Geometrical interpretation is given.

Keywords: optimum control, quadratic programming