УДК 539.3:534.1
С.А. Халилов, С.И. Весельский

Двусторонние оценки критической силы сжатой балки при наличии распределенной следящей нагрузки

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Ключевые слова: устойчивость, брус, распределенная следящая нагрузка, двусторонние оценки параметров критических нагрузок
Ключові слова: стійкість, брус, розподілене слідкуюче навантаження, двосторонні оцінки параметрів критичного навантаження
Key words: stability, beam, distributed tracking load, two-sided boundaries of critical load

Введение

Проблема устойчивости деформируемых систем и проблема определения собственных частот колеблющихся систем сводятся, как известно, к задачам на собственные значения. Эти проблемы лишь в «счастливых» случаях позволяют точный анализ, и они не интересны, поскольку достаточно изучены. Во всех остальных случаях решение можно получить только с помощью численного анализа. Наиболее эффективной здесь является вариационная постановка задачи.

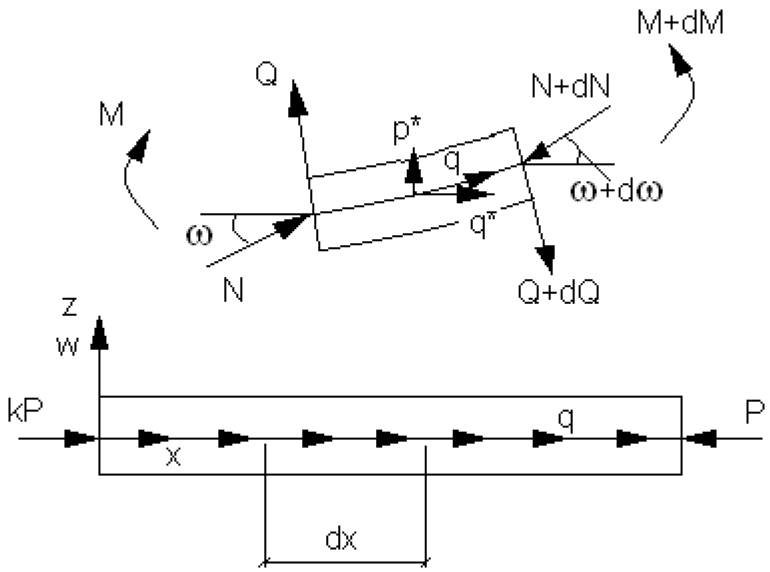
Индустриальный метод конечного элемента (МКЭ), опирающийся на вариационный принцип Лагранжа (метод перемещений в форме метода Ритца), в задачах устойчивости и колебаний дает лишь верхние оценки критических параметров (устойчивости и собственных частот).

Для оценки нижних значений искомых параметров в задачах не существует встречного принципа (типа Кастильяно), ибо принцип Кастильяно к задачам устойчивости вовсе неприменим. На практике инженера-исследователя больше интересует нижняя оценка критических параметров: ему важно знать, что критический параметр действительно не больше того параметра, значением которого он владеет так или иначе. Вот здесь первостепенную значимость принимает оценка снизу искомого параметра. Для полностью определенных [1] задач на собственные значения в случае операторов с обыкновенными производными оценки снизу могут быть получены методом постоянных Г.А. Шварца в сочетании с теоремой о включении Темпля [1]. К задачам не вполне определенным этот метод теоретически неприменим.

В данной работе на достаточно простом примере показывается применимость метода Шварца в сочетании теоремой с Темпля для не вполне определенных задач. Этот пример показывает, что метод Шварца допускает расширение, ограниченное теорией.

1 Исходное уравнение устойчивости и его анализ

Рассматривается задача об устойчивости при сжатии жестко защемленной по торцам балки при наличии распределенных продольных усилий постоянной интенсивности, носящих следящий характер: при выпучивании эти усилия следят за касательной к деформированной оси (см. рисунок).



К выводу уравнений равновесия

Уравнение устойчивости в проекциях на недеформированную ось (уравнение в вариациях), как нетрудно показать, имеет вид

$$\left(EI_y\left(\delta w\right)''\right)''+\left(N_0\left(\delta w\right)'\right)'-\delta p=0. \qquad (1)$$

Следует отметить, что в исходном состоянии распределенная нагрузка p отсутствовала $\left(p_0=0\right)$, а нагрузка δp появилась в результате выпучивания и, как видно из рисунка 1, связана с перемещением δw следующим образом:

$$\delta p=q\sin\delta\omega\approx q\delta\omega=q\left(\delta w\right)'=\frac{1-k}{l}P\left(\delta w\right)'. \qquad (2)$$

Введем безразмерную независимую переменную $\bar{x}=x/l$ (которую в дальнейшем вновь будем обозначать через x), учтем, что $EI_y=const$, примем во внимание равенство (2) и опустим знак вариации $\left(\delta\right)$. Тогда уравнение (1) можно представить в окончательном виде

$$w^{IV}+\lambda^2\left(k+\left(1-k\right)x\right)w''=0\ \ x\in\left[0;1\right), \qquad (3)$$

где $\lambda^2=Pl^2/EI_y$ – параметр критической нагрузки.

Присоединяя к уравнению (3) краевые условия

$$w\left(0\right)=w'\left(0\right)=w\left(1\right)=w'\left(1\right)=0, \qquad (4)$$

приходим к обобщенной задаче на собственные значения:

$$Mw=\lambda^2Nw,\ Uw=0, \qquad (5)$$

где M,N – дифференциальные операторы

$\left(M = \dfrac{d^4}{dx^4} \equiv D^4,\ N = -\left(k + \left(1-k\right)x\right)D^2 \right)$, U – оператор краевых условий (4).

Необходимо отметить, что в том случае, когда распределенная нагрузка q является консервативной, т. е. в процессе выпучивания стойки не изменяет своего направления, дополнительная нагрузка δp не возникает и ее появление связано со следящим характером распределенных усилий q, являющихся усилиями взаимодействия стойки и стенки нервюры. Следящий характер нагрузки вносит дополнительные трудности в решение задачи (5) на собственные значения, о чем будет сказано ниже.

Отметим некоторые свойства задачи (5):

1. Оператор M – самосопряженный и положительно определенный в классе функций $w(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0;1)$, где $\overset{0}{W}{}_2^2(0;1)$ – пространство С.Л. Соболева; элементами этого пространства являются функции, удовлетворяющие краевым условиям (4) и имеющие интегрируемые на $(0;1)$ с квадратом производные до второго порядка включительно.

2. Оператор N не является даже симметричным, поэтому задача на собственные значения (5) не является полностью определенной [2]. В случае консервативной нагрузки оператор становится самосопряженным и положительно определенным в классе функций $w(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0;1)$ (и тем более в классе функций $w(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0;1)$), а задача (5) – полностью определенной.

3. Если существует хотя бы одно положительное собственное значение λ^2, то существуют такие допустимые функции $u(x)$ (т.е. функции $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0;1)$), что

$$\int_0^1 u(x) Nu(x) dx > 0\,. \qquad (6)$$

Тогда для наименьшего положительного собственного значения λ_1^2 справедливо равенство (принцип Рэлея)

$$\lambda_1^2 = \min_{u \in W_2^2} \left[\int_0^1 uMudx \Big/ \int_0^1 uNudx \right], \qquad (7)$$

причем минимум берется по всем допустимым функциям $u(x)$, для которых выполнено условие (6).

4. Если $u(x)$ есть некоторая допустимая функция, такая, что выполнено неравенство (6), то между нулем и значением выражения в квадратных скобках (7) лежит по крайней мере одно положительное собственное значение.

5. В случае консервативной нагрузки q все собственные значения задачи (5) положительны (при условии: $k \in [0;1]$).

2 Определение верхних границ критической нагрузки

Точное решение задачи (5) не представляется возможным. Для приближенного определения наименьшего положительного собственного значения λ_1^2 воспользуемся процедурой Бубнова – Галеркина, которая, как известно, позволяет определить первые собственные значения с избытком. В качестве координатной выберем систему собственных функций родственной задачи:

$$u^{IV} = -\mu^2 u'' \quad x \in [0;1];$$
$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{8}$$

Первыми собственными функциями задачи (8) являются функции:

$$\begin{gathered}
\varphi_0(x) = 1 - \cos 2\pi x; \\
\varphi_1(x) = \sin \mu_1 (2x-1) - (2x-1)\sin \mu_1, \ \operatorname{tg} \mu_1 = \mu_1; \\
\varphi_2(x) = 1 - \cos 4\pi x; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
\varphi_{2k}(x) = 1 - \cos(2k+2)\pi x; \\
\varphi_{2k+1}(x) = \sin \mu_k (2x-1) - (2x-1)\sin \mu_k.
\end{gathered} \tag{9}$$

Система функций (9) полна в энергетическом пространстве оператора M и ортогональна как по энергии этого оператора, так и по энергии оператора $N = -d^2/dx^2$, т. е. справедливы такие равенства:

$$\int_0^1 \varphi_n''(x)\varphi_m''(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\,dx, \ n \neq m. \tag{10}$$

Ограничиваясь третьим приближением процедуры Бубнова - Галеркина, положим

$$w(x) = \sum_{n=0}^{2} A_n \varphi_n(x). \tag{11}$$

Тогда процедура Бубнова - Галеркина приводит к следующей однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
A_0\left\{\left(\varphi_0'', \varphi_0''\right) + \lambda^2\left[-k\left(\varphi_0', \varphi_0'\right) + (1-k)\left(x\varphi_0'', \varphi_0\right)\right]\right\} + \\
+A_1\left\{\lambda^2(1-k)\left(x\varphi_1'', \varphi_0\right)\right\} + A_2\left\{\lambda^2(1-k)\underline{\left(x\varphi_2'', \varphi_0\right)}\right\} = 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$A_0\left\{\lambda^2(1-k)\left(x\varphi_0'',\varphi_1\right)\right\}+$$
$$+A_1\left\{\left(\varphi_1'',\varphi_1''\right)+\lambda^2\left[-k\left(\varphi_1',\varphi_1'\right)+(1-k)\left(x\varphi_1'',\varphi_1\right)\right]\right\}+$$
$$+A_2\left\{\lambda^2(1-k)\left(x\varphi_2'',\varphi_1\right)\right\}=0,$$
$$A_0\left\{\lambda^2(1-k)\underline{\left(x\varphi_0'',\varphi_2\right)}\right\}+A_1\left\{\lambda^2(1-k)\left(x\varphi_1'',\varphi_2\right)\right\}+$$
$$+A_2\left\{\left(\varphi_2'',\varphi_2''\right)+\lambda^2\left[-k\left(\varphi_2',\varphi_2'\right)+(1-k)\left(x\varphi_2'',\varphi_2\right)\right]\right\}=0.$$

При написании системы (12) учтены равенства (10). Кроме того, подчеркнутые члены также равны нулю. Таким образом, первое и третье уравнения содержат лишь два слагаемых. Обозначение для скалярного произведения двух функций – стандартное, т. е.

$$(f_1,f_2)=\int_0^1 f_1(x)\,f_2(x)\,dx\,.$$

Интегралы, через которые выражаются коэффициенты системы уравнений (12), вычисляются по следующим формулам:

$$\left(\varphi_0'',\varphi_0''\right)=8\pi^4;\ \left(\varphi_0',\varphi_0'\right)=2\pi^2;\ \left(x\varphi_0'',\varphi_0\right)=-\pi^2;$$
$$\left(x\varphi_1'',\varphi_0\right)=4\pi^2\mu^2\sin\mu/\left(\mu^2-\pi^2\right)^2;$$
$$\left(x\varphi_0'',\varphi_1\right)=-4\mu^2\left(\mu^2-2\pi^2\right)\sin\mu/\left(\mu^2-\pi^2\right)^2;$$
$$\left(\varphi_1'',\varphi_1''\right)=8\mu^6/\left(1+\mu^2\right);\ \left(\varphi_1',\varphi_1'\right)=2\mu^4/\left(1+\mu^2\right);$$
$$\left(x\varphi_1'',\varphi_1\right)=\mu^4/\left(1+\mu^2\right);\ \left(x\varphi_2'',\varphi_1\right)=\frac{4\mu^2\left(8\pi^2-\mu^2\right)\sin\mu}{\left(4\pi^2-\mu^2\right)^2};$$
$$\left(x\varphi_1'',\varphi_2\right)=\frac{16\pi^2\mu^2\sin\mu}{\left(4\pi^2-\mu^2\right)^2};\ \left(\varphi_2'',\varphi_2''\right)=128\pi^4;$$
$$\left(\varphi_2',\varphi_2'\right)=8\pi^2;\ \left(x\varphi_2'',\varphi_2\right)=-4\pi^2.$$

Здесь μ означает первый отличный от нуля корень уравнения $\operatorname{tg}\mu=\mu$ и может быть вычислен с достаточной степенью точности по асимптотической формуле [3]:

$$\mu=a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}-\frac{13}{15a^5}-\frac{146}{105a^7}-\ldots\approx 4.493016,\ a={}^{3\pi}\!/_{2}\,.$$

Приравняв к нулю определитель системы (12), получим уравнение относительно λ^2; искомым является наименьший положительный корень этого уравнения. Учитывая только первое уравнение системы (12), т. е. удерживая в представлении (11) всего одно слагаемое с A_0, получим в первом приближении

$$\lambda^2 = \frac{8\pi^2}{1+k}. \tag{13}$$

При $k=1$, т. е. $q \equiv 0$, получаем точное значение $\lambda^2 = 4\pi^2$.

Сохраняя в выражении (11) два члена, приходим к квадратному уравнению $\left(\rho = \lambda^2\right)$:

$$\rho^2 \left[(1+k)^2 + \underline{(1-k)^2 \frac{16\mu^2\left(\mu^2 - 2\pi^2\right)}{\left(\mu^2 - \pi^2\right)^4}} \right] - \rho 8(1+k)\left(\pi^2 + \mu^2\right) + 64\pi^2\mu^2 = 0. \tag{14}$$

Здесь подчеркнутое выражение (обозначим его через C) весьма мало: $C = 0.0128$; поэтому ясно, что без особой потери точности в квадратной скобке можно сохранить лишь первое слагаемое. Решая теперь полученное таким образом квадратное уравнение, вновь приходим к формуле (13). Следовательно, формула (13) дает хорошее приближение для верхней границы первого собственного значения λ^2. Это подтверждается и вычислениями в третьем приближении, влияние которого оказалось еще меньше, в связи с чем указанные вычисления здесь не приводятся. Таким образом, верхняя граница критической нагрузки дается формулой, которая при $k=1$ переходит в точную:

$$P_{kp}^{(1)} = \frac{8\pi^2 EI_y}{l^2(1+k)}. \tag{15}$$

Точно так же можно получить оценку второй критической нагрузки:

$$\lambda_2^2 = \frac{8\mu^2}{1+k},\ P_{kp}^{(2)} = \frac{8\mu^2 EI_y}{l^2(1+k)},\ \mu \approx 4.493. \tag{16}$$

Оценка для λ_2^2 понадобится в дальнейшем.

3 Определение нижних границ критической нагрузки

Получение оценок нижних границ собственных значений является, как известно, задачей более сложной, чем получение оценок верхних границ, так как в последнем случае имеются такие универсальные методы, как методы Ритца и Бубнова – Галеркина. Последний шире метода Ритца, так как применим не только к полностью определенным задачам, что и было продемонстрировано выше. То, что последующие приближения процедуры Бубнова - Галеркина не привели к сколь-нибудь существенным уточнениям, вселяет надежду на то, что формула для первого собственного значения (13) является достаточно точной. Во всяком случае, было бы весьма заманчиво считать столь простую формулу, как формула (13), близкой к истине. В связи с этим первостепенное значение приобретает вопрос получения оценок снизу первого собственного значения, сложность которого заключается в том, что известные методы [2] применимы к полностью определенным задачам, к которым рассматриваемая задача не относится. Трудность в данном случае заключается в том, что оператор N не является даже симметричным, что, как уже подчеркивалось, связано с неконсервативностью распределенной нагрузки q.

Наиболее универсальным и вместе с тем достаточно простым методом оценивания собственных значений обобщенной задачи типа (5) представляется метод последовательных приближений К. А. Шварца [2], уже первый шаг которого приводит к весьма точным для практики результатам. Но метод Шварца применим, к сожалению, к полностью определенным задачам, так как он существенно использует положительную определенность обоих операторов задачи: M и N. В нашем случае оператор M положительно определенный, а N даже не является симметричным. Но так ли плох оператор N, как это кажется с первого взгляда?

Чтобы получить ответ на поставленный вопрос, следует отметить такие обстоятельства:

1. Существуют положительные собственные значения задачи (5); приближенные значения первых двух были найдены выше. На основании общих теорем спектрального анализа в гильбертовом пространстве [4] можно заключить, что положительных собственных значений счетное множество, откуда, в свою очередь, следует, что найдется счетное множество допустимых функций, таких, что выполнены неравенства (строгие) (6).

2. Оператор $N \equiv -\left[k+(1-k)x\right]D^2 \equiv -g(x)D^2$ зависит от функции $g(x)=k+(1-k)x$, $k\in[0;1]$, $x\in[0;1]$, которая определяет семейство отрезков прямых, сплошь заполняющее треугольную область, ограниченную прямыми $x=0,\ g_1(x)=x,\ g_2(x)=1$. Следовательно, справедливо двойное неравенство

$$N_1=-xD^2\le N\le -D^2=N_2,\ x\in[0;1], \tag{17}$$

из которого следует, что оператор N все-таки лучше оператора N_1, но хуже оператора N_2, который положительно определен.

3. Можно показать, что существует такое счетное множество допустимых функций $w_n(x)\in \overset{0}{W}{}_2^2[0;1]$, $n=\overline{0,\infty}$, что

$$\begin{gathered}(Nw_n,w_n)>0,\\ \left|(Nw_n,w_m)-(Nw_m,w_n)\right|\le\varepsilon(m,n),\end{gathered} \tag{18}$$

где $\varepsilon(m,n)$ – достаточно малое положительное число, зависящее от m, n. Первое неравенство в (18) очевидно, доказательство второго сложно и здесь опускается; его справедливость будет продемонстрирована ниже. Важно отметить, что если второе неравенство (18) выполнено для некоторого фиксированного семейства допустимых функций, то оно будет выполнено и для любого другого семейства допустимых функций. Качество конкретного множества допустимых функций определятся величиной $\inf\limits_{m,n}\varepsilon(m,n)$.

4. Нижняя грань $\varepsilon(m,\ n)$ $\left(m,\ n=\overline{0,\infty}\right)$ достигается на множестве допустимых функций, определенных по правилу:

$$
\begin{gathered}
Mw_{n+1}=Nw_n, \\
Uw_{n+1}=0\ \left(n=\overline{0,\infty}\right), \\
w_0\in \overset{0}{W}{}_2^2[0;1].
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Оператор N, удовлетворяющий условиям (18), можно назвать почти положительно определенным оператором. Как будет видно из дальнейшего, в рассматриваемом случае оператор N является почти положительно определенным.

Применим теперь к решению поставленной задачи метод последовательных приближений Шварца [2].

Положим

$$\overset{0}{W}{}_2^2[0;1]\ni w_0(x)\equiv x^2-2x^3+x^4$$

и решим краевую задачу:

$$Mw_1(x)=Nw_0(x);$$
$$w_1(0)=w_1'(0)=w_1(1)=w_1'(1)=0.$$

В результате получим функцию

$$w_1(x)=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}\begin{bmatrix}(3k+4)x^2-5(1-k)x^3-35kx^4+7(7k-1)x^5- \\ -14(2k-1)x^6-6(1-k)x^7\end{bmatrix}.$$

Дальнейшее сводится к вычислению постоянных Шварца a_k и отношений Шварца $\nu_{k+1}={a_k}/{a_{k+1}}$, $k=0,1,\ldots$. Вычисления эти элементарны, но весьма громоздки, поэтому в дальнейшем приводится лишь окончательный результат. Имеем [2]

$$a_k=\int_0^1 w_i N w_{k-i}dx,\ 0\le i\le k,\ k=0,1,\ldots$$

Если бы оператор N был самосопряженным, то постоянные a_k зависели бы только от номера k. Например, при N самосопряженном (M – самосопряжен и положительно определен) было бы

$$a_k=\int_0^1 w_i M w_{k-i+1}dx=\int_0^1 w_{k-i+1} M w_i dx=\int_0^1 w_{k-i+1} N w_{i-1}dx=\int_0^1 w_{i-1} N w_{k-i+1}dx,$$

т. е. a_k зависит только от суммы $i+(k-i)=k$,а следовательно, только от k. В нашем случае это не так. Однако то, что оператор N – почти положительно определенный (а следовательно, и почти самосопряженный), позволяет выйти из этого затруднения: постоянные a_k не зависят (почти не зависят) от i.

Итак

$$a_0=\int_0^1 w_0Nw_0dx=-2\int_0^1\left(x^2-2x^3+x^4\right)\left[k+(1-k)x\right]\left(1-6x-6x^2\right)dx=\frac{1+k}{3\cdot5\cdot7},$$

$$a_1=\int_0^1 w_1Nw_0dx\neq\int_0^1 w_0Nw_1dx.$$

Поэтому вычисляем два значения a_1:

$$a_1^{(0)}=\int_0^1 w_1Nw_0dx,\ a_1^{(1)}=\int_0^1 w_0Nw_1dx,$$

которые, как ожидается (оператор N почти самосопряжен), должны мало отличаться друг от друга. Имеем (вычисления громоздки):

$$a_1^{(0)}=\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot7\cdot10}\left[k(k+1)+\frac{1-k}{3\cdot7\cdot11}(115k+116)\right]=$$

$$=\frac{29}{(3\cdot7)^2\cdot5\cdot10\cdot11}\left(k^2+2\frac{115}{116}k+1\right)\approx\frac{29(k+1)^2}{(3\cdot7)^2\cdot5\cdot10\cdot11};$$

$$a_1^{(1)}=a_1^{(0)}-2(1-k)\int_0^1 w_1w_0'dx=a_1^{(0)}+\frac{(1-k)^2}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}.$$

Теперь можно оценить разницу $a_1^{(0)}$ и $a_1^{(1)}$, а тем самым – степень отклонения оператора N от самосопряженного:

$$\frac{a_1^{(1)}-a_1^{(0)}}{a_1^{(0)}}=\frac{(1-k)^2}{7\cdot9\cdot11}\frac{116}{3\cdot7\cdot11}\left(k^2+2\frac{115}{116}k+1\right)\approx\frac{(1-k)^2(1+k)^2116}{3\cdot7\cdot11\cdot7\cdot9\cdot11}\approx$$

$$\approx0.72462\cdot10^{-3}\left(1-k^2\right)^2,$$

$$\max_{k\in[0;1]}\left|\frac{a_1^{(1)}-a_1^{(0)}}{a_1^{(0)}}\right|=0.4076\cdot10^{-3}\approx0.04\%.$$

Следовательно, с очень высокой точностью можно принять $a_1=a_1^{(0)}$.

Имеем далее

$$a_2=\int_0^1 w_1Nw_1dx=\frac{461(1+k)}{(3\cdot4\cdot5\cdot7)^2\cdot11\cdot12\cdot13}\left(k^2+2\frac{449}{461}k+1\right)\approx\frac{461(1+k)^3}{(3\cdot4\cdot5\cdot7)^2\cdot11\cdot12\cdot13}$$

Теперь можно вычислить отношения Шварца:

$$\nu_1=\frac{a_0}{a_1}=\frac{3\cdot7\cdot10\cdot11(1+k)}{29\left(k^2+2\frac{115}{116}k+1\right)}\approx\frac{3\cdot7\cdot10\cdot11}{29(1+k)};$$

$$\nu_2 = \frac{29 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 16}{461(k+1)} \cdot \frac{k^2 + 2\frac{115}{116}k + 1}{k^2 + 2\frac{449}{461}k + 1} \approx \frac{29 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 16}{461(k+1)}.$$

Тогда [2] $\qquad \nu_1 \ge \nu_2 \ge \lambda_1^2$.

Для получения нижней границы λ_1^2 необходимо иметь оценку второго собственного значения λ_2^2, в качестве которой принимаем величину, определяемую формулой (16). Тогда искомая оценка дается формулой [1]

$$\nu_1^* = \nu_2 - \frac{\nu_1 - \nu_2}{\frac{\lambda_2^2}{\nu_2} - 1} \le \lambda_1^2 \le \nu_2^*, \tag{20}$$

где $\nu_2^* = \min\left\{\nu_2, \frac{8\pi^2}{1+k}\right\}$. Если принять $\lambda_1^2 = \frac{1}{2}\left(\nu_1^* + \nu_2^*\right)$, что естественно, то погрешность в определении критической нагрузки $P_{kp} = \frac{\lambda_1^2 EI_y}{l^2}$ при любом $k \in [0;1]$ составит менее 1%. Таким образом, формула (20), являющаяся искомой, обладает достаточно высокой точностью. Так, при $k = 0$ (неблагоприятный случай) имеем $77.422 < \lambda_1^2 < 78.507$, и если теперь принять $\lambda_1^2 = \frac{1}{2}(77.422 + 78.507) = 77.9645$, то относительная погрешность определения критической нагрузки даже в этом неблагоприятном случае составит всего лишь 0.696 %. По формуле (13) получаем при $k = 0$ $\lambda_1^2 = 8\pi^2 = 78.957$, т. е. критическая нагрузка оказывается несколько завышенной.

В заключение следует отметить, что полученные результаты применимы и при $k < 0$, т. е. когда на одном конце балки приложена растягивающая сила. Случай $k = -1$, естественно, исключается, так как при таком нагружении потеря устойчивости не имеет места.

Список литературы

1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 447 с.

2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

3. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

4. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 656 с.

Рецензент: д. ф.-м. н., проф., зав. каф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 17.03.09