УДК 539.3

Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Полосовые и круговые трещины нормального разрыва в одной плоскости упругого однородного пространства

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Ключевые слова: трещины полосовые, круговые, теоремы сложения, бесконечные системы алгебраических уравнений.
Ключові слова: тріщини смугові, кругові, теореми додавання, нескінченні системи алгебраїчних рівнянь.
Keywords: strip, circular cracks, addition theorems, infinite systems of the algebraic equations.

При решении смешанных задач теории упругости для полупространства (контактных задач) с успехом были использованы теоремы сложения [1 - 5]. В настоящей статье дано решение смешанной задачи о системе круговых и полосовых непересекающихся трещин, расположенных в одной плоскости упругого однородного пространства. При этом предполагается, что противоположные берега трещин нагружены нормальными симметричными относительно плоскости трещины усилиями и между собой не взаимодействуют. Исследование этой задачи стало возможным благодаря новым теоремам сложения, полученным ранее авторами [5].

Задача теории упругости для трещин нормального разрыва, лежащих в одной плоскости, сводится [6] к смешанной задаче: в пространстве R_3^+ найти убывающее на бесконечности решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям:

$$u_z'(x, y, 0) = (\nu - 1)\mu^{-1} \cdot p(x, y), \quad (x, y) \in (S); \tag{1}$$

$$u(x, y.0) = 0, \quad (x, y) \notin (S), \tag{2}$$

где (S) - область расположения трещины на плоскости $z = 0$; $p(x, y)$ - нагрузка её берегов; ν, μ - упругие постоянные.

В рассматриваемом случае (S) представляет собой объединение конечной системы параллельных полос различной ширины и расположенных между ними конечного числа кругов различных радиусов.

Будем вначале рассматривать уравнение Лапласа в двух локальных системах координат (x_j, y_j, z_j), $(j = 1,2)$, связанных с полосой и кругом. Эти системы сдвинуты на величину h_{12} по оси *Ox* так, что $x_1 = h_{12} + x_2$. С первой системой (x_1, y_1, z_1) свяжем систему координат эллиптического цилиндра (ξ_1, θ_1, y_1); $x_1 = a_1 \cdot ch\xi_1 \cdot \cos\theta_1$, $z_1 = a_1 \cdot sh\xi_1 \cdot \sin\theta_1$, $0 \le \xi_1 < \infty, |\theta_1| \le \pi$. Со второй системой (x_2, y_2, z_2) свяжем систему координат сжатого эллипсоида вращения $(\xi_2, \theta_2, \varphi_2)$: $x_2 = c_1 \cdot ch\xi_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\varphi_2$, $y_2 = c_1 \cdot ch\xi_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\varphi_2$, $z_2 = c_1 \cdot sh\xi_2 \cdot \cos\theta_2$,

$0 \le \xi_2 < \infty, \quad 0 \le \theta_2 \le \pi, \quad 0 \le \varphi_2 \le 2\pi$.

В этих формулах $2a_1$ и c_1 - соответственно ширина полосы и радиус круга, причём $a_1 + c_1 > h_{12}$.

Теоремы сложения, необходимые для решения поставленной задачи, имеют вид [5]:

$$e^{i\mu y_1} \cdot Gek_n(\xi_1, -q_1) se_n(\theta_1, -q_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} K_{m,s}^{(n)}(\mu;1,2) \times$$

$$\times \varphi_{2s+|m|+1}^{m}(\xi_2, \theta_2, \varphi_2), \; \varphi_n^{(m)}(\xi, \theta, \varphi) = P_n^m(ish\xi) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}; \tag{3}$$

$$Q_n^m(ish\xi_2) \cdot P_n^m(\cos\theta_2) \cdot e^{im\varphi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} E_{k,n}^{(m)}(\mu;2,1) \cdot Ce_k(\xi_1, -q_1) \times \right.$$

$$\left. \times ce_k(\theta_1, -q_1) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{k,n}^{(m)}(\mu;2,1) \cdot Se_k(\xi_1, -q_1) \cdot se_k(\theta_1, -q_1) \right] d\mu, \tag{4}$$

где $Gek_n(x,q), se_n(\theta,q), Ce_n(x,q), ce_n(\theta,q), Se_n(x,q)$ - функции Матье [7]; $P_n^m(z), Q_n^m(z)$ - функции Лежандра; $q_1 = \dfrac{a_1^2 \mu^2}{4}$.

Сходимость ряда (3) имеет место при условии $a_1 \cdot ch\xi_1 + c_1 < h_{12}$, а ряда (4) – при $c_1 \cdot ch\xi_2 + a_1 < h_{12}$. Выражения для коэффициентов $K_{m,s}^{(n)}$, $E_{k,n}^{(m)}$, $F_{k,n}^{(m)}$ этих разложений приведены в работе [5].

Будем вначале рассматривать более простой вариант задачи: (S) - одна полоса и один круг.

Решение задачи, удовлетворяющее условию (2), ищем в виде $u = u_1 + u_2$, где обозначены

$$u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1} d\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(\mu) \cdot Gek_n(\xi_1, -q) \cdot se_n(\theta_1 - q_1), \tag{5}$$

$$u_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}^{(1)} \cdot Q_{2n+|m|+1}^{m}(ish\xi_2) \cdot P_{2n+|m|+1}^{m}(\cos\theta_2) \cdot e^{im\varphi_2}, \tag{6}$$

$a_n^{(1)}(\mu), b_{nm}^{(1)}$ - неизвестные функции и коэффициенты, которые подлежат определению из оставшихся краевых условий (1).

Условие (2) удовлетворяется автоматически из-за того, что вне полосы $\theta = 0$ или $\theta_1 = \pi$ и на этих лучах $se_n(0, -q) = se_n(\pi, -q) = 0$. Это же условие удовлетворяется и вне круга, так как там $\theta_2 = \pi/2$ и $P_{2n+|m|+1}^{m}(0) = 0$.

При достаточно общих условиях на функцию $f(x,y)=(\nu-1)\mu^{-1}\cdot p(x,y)$, заданную на полосе и круге, можно записать разложения

$$\sqrt{a_1^2-x_1^2}\cdot f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu y_1}d\mu\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\mu)se_k(\theta_1-q_1), \tag{7}$$

$$\sqrt{c_1^2-x_2^2-y_2^2}\cdot f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{nm}\cdot p_{2n+|m|+1}^{m}(\cos\theta_2). \tag{8}$$

Коэффициенты $\alpha_k(\mu)$ и β_{nm} находим по формулам обращения этих рядов.

Теперь воспользуемся теоремами сложения (3), (4) для того, чтобы найти неизвестные величины разложений (5), (6) из (1).

В окрестности полосы $0\le\xi_1<\xi_1^0>\varepsilon>0$ решение (6) запишем с помощью (4) в координатах эллиптического цилиндра (ξ_1,θ_1,y_1) и реализуем условие (1) на полосе $\xi_1=0$. В результате использования разложения (7) получим связь между неизвестными $a_n^{(1)}(\mu)$ и $b_{nm}^{(1)}$. Граничные условия на круге $\xi_2=0$ можно удовлетворить, если решение (5) в окрестности диска $0<\xi_2\le\delta>0$ переписать с помощью (3) в координатах эллипсоида $(\xi_2,\theta_2,\varphi_2)$ и воспользоваться разложением (8). Это приводит к равенствам

$$x_n^{(1)}(\mu)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}y_{rm}^{(1)}\cdot R_{n,m}^{(r)}(\mu;2,1)=\alpha_n^{(1)}(\mu),\quad n\ge1,\quad , \tag{9}$$

$$y_{nm}^{(1)}+\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\sum_{s=0}^{\infty}x_s^{(1)}(\mu)\cdot M_{m,n}^{(s)}(\mu;1,2)=\beta_{nm}^{(1)}, \tag{10}$$

где обозначены

$$b_{nm}^{(1)}\cdot q_{2n+|m|+1}^{m}=y_{nm}^{(1)},\quad a_n^{(1)}(\mu)\cdot Gek_n'(0,-q_1)=x_n^{(1)}(\mu),\quad q_r^{(m)}=\frac{d}{dz}Q_r^m(z)\Big|_{z=i0},$$

$$R_{n,m}(\mu;2,1)=\frac{F_{n,2r+|m|+1}^{(m)}(\mu;2,1)}{q_{2r+|m|+1}^{(m)}}\cdot Se_n'(0,-q_1),$$

$$M_{m,n}^{(s)}(\mu;1,2)=\frac{K_{m,n}^{(s)}(\mu;1,2)}{Gek_s'(0,-q)}\cdot\frac{d}{dz}P_{2n+|m|+1}^{m}(z)\Big|_{z=0}.$$

Равенства (9), (10) следует рассматривать как интегро-алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных $x_n^{(1)}(\mu)$ и $y_{nm}^{(1)}$.

Пусть $v_n^{(1)}(\mu)$, $z_n^{(1)}(\mu)$ - чётная и нечётная часть функции $x_n^{(1)}(\mu)$, а $\gamma_k^{(1)}(\mu)$, $\delta_k^{(1)}(\mu)$ - чётная и нечётная часть функции $\alpha_n^{(1)}(\mu)$. Тогда, приравнивая чётные и нечётные функции в (9), от системы (9), (10) перейдём к системе

$$v_n^{(1)}(\mu)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}y_{rm}^{(1)}\cdot R_{n,m}^{(r)+}(\mu)=\gamma_n^{(1)}(\mu), \tag{11}$$

$$z_n^{(1)}(\mu)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}y_{rm}^{(1)}\cdot R_{n,m}^{(r)-}(\mu)=\delta_n^{(1)}(\mu), \quad \mu\ge 0,\, n\ge 1, \tag{12}$$

$$y_{nm}^{(1)}+\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^{\infty}v_s^{(1)}(\mu)d\mu\cdot M_{m,n}^{(s)+}(\mu)+\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^{\infty}z_s^{(1)}(\mu)d\mu\cdot M_{m,n}^{(s)-}(\mu)=\beta_{nm}^{(1)}, \tag{13}$$

где $R_{n,m}^{(r)\pm}(\mu)=\frac{1}{2}\left(R_{n,m}^{(r)}(\mu;2,1)\pm R_{n,m}^{(r)}(-\mu;2,1)\right)$,

$$M_{m,n}^{(s)\pm}(\mu)=\frac{1}{2}\left(M_{m,n}^{(s)}(\mu;1,2)\pm M_{m,n}^{(s)}(-\mu;1,2)\right).$$

Разложим функции $v_s^{(1)}(x)$, $z_s^{(1)}(x)$ по некоторой полной ортонормированной на $(0,\infty)$ системе функций $\varphi_j(x)$:

$$\begin{pmatrix} v_n^{(1)}(x) \\ z_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} e_{nk}^{(1)} \\ h_{nk}^{(1)} \end{pmatrix}\cdot\varphi_k(x). \tag{14}$$

Подставим разложения (14) в систему уравнений (11) – (13). В результате ортогонализации равенств, полученных из (11) – (12), приходим к совокупности трёх бесконечных систем уравнений относительно неизвестных $e_{nk}^{(1)}$, $h_{nk}^{(1)}$, $y_{nm}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} &e_{nk}^{(1)}(\mu)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}y_{rm}^{(1)}\cdot \overline{R}_{n,m}^{(r)+}(k)=\overline{\gamma}_{nk}^{(1)}, \\ &h_{nk}^{(1)}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}y_{rm}^{(1)}\cdot \overline{R}_{n,m}^{(r)-}(k)=\overline{\delta}_{nk}^{(1)}, \\ &y_{nm}^{(1)}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e_{sk}^{(1)}\cdot \overline{M}_{m,n}^{(s)+}(k)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}h_{sk}^{(1)}\overline{M}_{m,n}^{(1)-}(k)=s_{nm}^{(1)}, \end{aligned} \tag{15}$$

где обозначены

$$\overline{R}_{n,m}^{(r)\pm}(k)=\int_0^{\infty}R_{n,m}^{(r)\pm}(\mu)\cdot\varphi_k(\mu)d\mu, \qquad \overline{\gamma}_{nk}^{(1)}=\int_0^{\infty}\gamma_n^{(1)}(x)\cdot\varphi_k(x)dx;$$

$$\overline{M}_{n,m}^{(s)\pm}(k)=\int_0^\infty M_{n,m}^{(s)\pm}(\mu)\cdot\varphi_k(\mu)d\mu\,, \qquad \overline{\delta}_{nk}^{(1)}=\int_0^\infty \delta_n^{(1)}(x)\cdot\varphi_k(x)dx\,.$$

Доказано (с помощью равенств Парсеваля, вытекающих из теорем сложения), что система уравнений (15) является системой уравнений с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве сходящихся последовательностей. К такой системе уравнений можно применить метод редукции, который сходится к точному решению.

Для решения задачи в случае нескольких параллельных полос и нескольких кругов следует дополнительно воспользоваться теоремами сложения для двух эллиптических цилиндров [1] и двух эллипсоидов вращения [3,4]. В результате применения изложенного метода получим совокупность N_1+2N_2 бесконечных систем вида (15), где N_1 – число круговых щелей, N_2 – число полосовых щелей.

Список литературы

1. Проценко В.С. Контактная задача с несколькими штампами / В.С. Проценко, В.Г. Проценко // Докл. АН УССР. - 1972. - №10. – С. 925 – 927.

2. Денисова Т.В. Задачи о действии гладких штампов на упругое полупространство / Т.В. Денисова, А.Г. Николаев. // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34. – № 2. – С. 26 – 31.

3. Проценко В.С. Внешние гармонические задачи Дирихле и Неймана для системы сжатых сфероидов и их применение к задачам теории упругости / В.С. Проценко, Т.В. Денисова, Е.В. Гребеникова // Теор. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 3 – 8.

4. Проценко В.С. Внешняя гармоническая задача Дирихле для системы сжатых сфероидов, фокальные круги которых лежат в одной плоскости / В.С. Проценко, Е.В. Гребеникова // Доповіді НАН України. – 2003. – №8. – С. 24 – 29.

5. Проценко В.С. Теоремы сложения гармонических функций в координатах эллиптического цилиндра и сжатого эллипсоида вращения и их приложение к решению контактной задачи о совместном вдавливании в упругое полупространство полосового и кругового штампов / В.С. Проценко, Т.В. Денисова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. Вып. 35. – Х.: – 2007. – С. 63 – 68.

6. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 1979. – 264 с.

7. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложение функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 457 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. зав. каф. Костюк Г.И.
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ».

Поступила в редакцию 27.01.09.