УДК 516:621.01 Е. Н. Бут, А. К. Мялица

Математическое моделирование воспроизведения плоской многосвязной фигуры, заданной аналитическим эталоном

Институт проблем машиностроения НАН Украины

Ключевые слова: форма фигуры, близость форм, погрешность воспроизведения формы, параметры формы
Ключові слова: форма фігури, близькість форм, похибка відтворення форми, параметри форми.
Key words: figure form, form proximity, error of form representation, form parameters.

В данной работе проводится моделирование воспроизведения на производстве плоской многосвязной фигуры, заданной аналитическим эталоном. При конструировании деталей с помощью современных информационных технологий результатом проектирования является аналитический эталон детали, т.е. некоторая система уравнений аналитической геометрии, описывающая ее контур. Аналитический эталон детали задает только номинальные координаты контура детали, что явно недостаточно для ее изготовления. Проблема задания точности воспроизведения координат контура детали пока еще не нашла своего решения.

Если определение точности размера детали сводится к определению погрешности его воспроизведения, т.е. отклонению размера от номинального, то свести точность воспроизведения контура детали к отклонению его от номинального единственным образом пока не представляется возможным.

Погрешность воспроизведения номинального размера R на готовой детали обычно определяют как $\Delta R = \max_i \left(\left| R_i^{в} - R \right| \right)$. Такое определение погрешности с точки зрения функционального анализа эквивалентно введению на множестве погрешностей метрики пространства $\mathrm{C}^{(0)}$. Следует отметить, что требования собираемости деталей в узел иногда требуют указания знака погрешности, что не исключает рассмотрения погрешности как метрики. Просто в этом случае окрестности, задаваемые погрешностью со знаком, могут быть несимметричными (рис. 1).

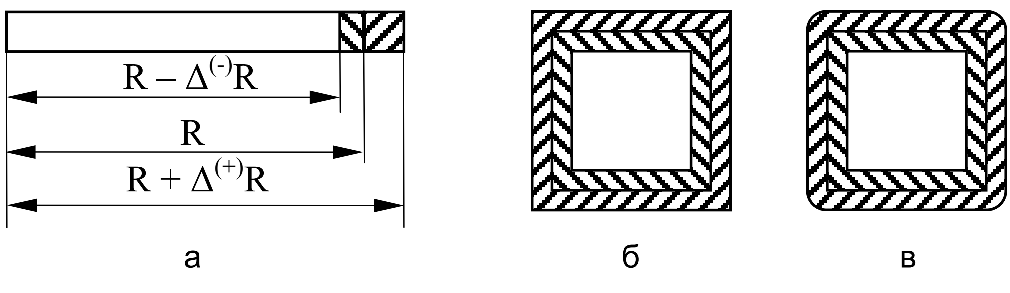

Рис. 1. Несимметричные и симметричные погрешности

Если понятие погрешности воспроизведения линейного размера однозначно (см. рис. 1, а), то понятие погрешности воспроизведения контура многозначно. Даже если мы примем предположение об эквидистантности контура области ошибок воспроизводимому контуру и построим его, то угловые точки (см. рис. 1, б, в) в каком-то смысле являются особыми, так как расстояние между ними в √2 раз больше, чем между эквидистантами. При воспроизведении на фрезерном станке с помощью пальчиковой или сферической фрез контура, полого внутри, нам не удастся воспроизвести углы, и результат будет иметь вид представленный на рис. 2.

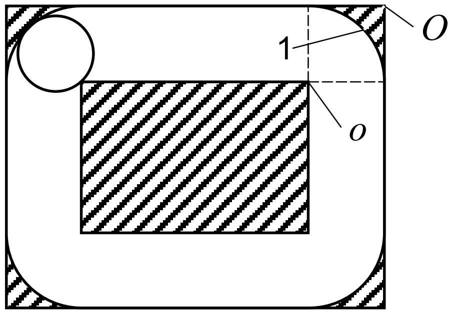

Рис. 2. Воспроизведение прямоугольного контура пальчиковой или сферической фрезами

Особая угловая точка O воспроизводимого контура находится вне воспроизведенного контура, так как эквидистанта к точке o представляет собой дугу окружности 1. Получается, что при воспроизведении эквидистантного контура к выпуклому контуру с угловыми точками участками на воспроизведенном контуре, соответствующими этим точкам, будут дуги окружностей, и, следовательно, в общепринятом смысле такое задание погрешности нарушает передаваемую форму.

Целью настоящей работы является установление связи между погрешностью воспроизведения контура и погрешностью его формы.

Как известно, понятие формы в геометрии является первичным и неопределяемым. Однако что же все-таки мы подразумеваем под этим понятием?. Очевидно, что если мы совершаем над фигурой операции параллельного переноса или поворота, то от этого ее форма не меняется. Рассмотрим, какое влияние оказывают эти операции на уравнение фигуры.

Пусть фигура задана неявным уравнением $\mathbf{F}\,(x, y) = \mathrm{C}$.

Тогда операция параллельного переноса фигуры эквивалентна замене переменных $(x,\ y)$ на переменные (x', y'), связанные следующими отношениями: $x' = x + a,\ y' = y + b$. После замены переменных в уравнении фигуры получаем

$$\mathbf{F}\,(x, y) = \mathbf{F}\,(x' - a, y' - b).$$

Обратим внимание, что

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

и после замены переменных это соотношение остается:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y'} = 0\,.$$

Таким образом, можно сделать предположение о том, что параметры, характеризующие форму фигуры, связаны не со значениями функции **F,** а с ее производными.

Выполним в плоскости XOY поворот фигуры на угол α и проанализируем результаты такого преобразования. Поворот фигуры в этой плоскости на угол α эквивалентен следующей замене переменных:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \quad x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\sin\alpha.$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y'} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\cos\alpha.$$

Следовательно, операция поворота, как и операция параллельного переноса, сохраняя форму фигуры, заменяет производные их линейной комбинацией.

Если учесть, что собственные движения плоскости имеют определитель равный по модулю 1, то получим следующее утверждение:

Если для двух контуров $\mathbf{F}_1$ *и* $\mathbf{F}_2$ *существует некоторое преобразование, определитель которого по модулю равен 1, то контуры* $\mathbf{F}_1$ *и* $\mathbf{F}_2$ *имеют одинаковую форму.*

Таким образом, сохраняя форму контура, поворот при неизменной последовательности точек на контуре, в которых вычисляют производные, осуществляет циклическую перестановку элементов последовательности производных на контуре. Применение этого свойства поворота на практике вызовет трудность возобновления последовательности точек, в которых необходимо вычислить производные.

Очевидно, что если две фигуры конгруэнтны, т.е. равны, то они имеют одинаковую форму. Равенство фигур иногда вводят через преобразование наложения одной фигуры на другую [3].

Фигура **F** *равна* $\mathbf{F}^1$, *если существует наложение фигуры* **F** *на* $\mathbf{F}^1$, *короче, если можно наложить* **F** *на* $\mathbf{F}^1$

Преобразование фигуры **F** в фигуру $\mathbf{F}^1$ называют наложением, перемещением, движением, если каждым двум точкам a, b до преобразования соответствуют две точки a^1, b^1 после преобразования такие, что отрезки ab, a^1b^1, соединяющие эти точки, равны ab, $= a^1b^1$.

Заметим, что наложение, обратное наложению, является наложением и что композиция наложений также является наложением.

Так как наложение по определению сопоставляет парам точек a, b такие пары a^1, b^1, что отрезки до преобразования ab и после него a^1b^1 равны, то оно (наложение) сохраняет все геометрические соотношения и, следовательно, сохраняет форму фигуры.

Приведем некоторые свойства наложений:

1. Наложение сохраняет расстояния между точками, измеренные в каком бы то ни было масштабе.

2. Наложение сохраняет углы: если точки a, b, c отображаются на точки a^1, b^1, c^1, то угол $\angle abc$ равен углу $\angle a^1b^1c^1$.
3. Если точки a, b, m, n отображаются в точки a^1, b^1, m^1, n^1 и точка m принадлежит отрезку ab , то $m^1 \in a^1b^1$, а если $n^1 \notin a^1b^1$, то $n^1 \notin a^1b^1$.
4. Образом отрезка при наложении является отрезок (это так, потому что наложение сохраняет форму).
5. Образом плоского треугольника при наложении является плоский треугольник.
6. Образом луча служит луч, а образом прямой – прямая.
7. Образом плоскости служит плоскость, а образом полуплоскости – полуплоскость.
8. Образы параллельных прямых и плоскостей параллельны.
9. Образом тетраэдра служит тетраэдр, образом пространства – пространство, образом полупространства – полупространство.

Обратим внимание, что рассматриваемые выше операции параллельного переноса и поворота являются наложениями. Помимо этих операций наложениями, а следовательно, преобразованиями, сохраняющими форму фигуры, являются центральная симметрия, зеркальная симметрия и симметрия относительно прямой в пространстве.

Наложения делятся на два класса: переносы, повороты и винтовые наложения называются наложениями первого рода, а скользящие отражения и зеркальные повороты (в пространстве) – наложениями второго рода. Наложения первого рода можно осуществить непрерывным движением, и, следовательно, с их помощью можно переносить форму на технологическом оборудовании, не меняя первичной установки заготовки. Напротив, наложения второго рода нельзя осуществить непрерывным движением, и, следовательно, при применении их в формообразующих технологиях необходимо менять первичную установку заготовки. Для проектирования движений формообразующих процессов будет полезны следующие утверждения:

Наложение однозначно задается наложением четырех точек, не лежащих в одной плоскости.

Такое наложение можно получить композицией переноса двух поворотов и, может быть отражения.

Положение точки в пространстве однозначно определяется её расстоянием от четырех точек, не лежащих в одной плоскости.

Следовательно, если точки a, b, c, d отобразились на точки a^1, b^1, c^1, d^1, то и все точки пространственной фигуры заняли соответствующее положение, т.е. наложение определено однозначно.

Обратим внимание, что, используя интуитивное представление о форме фигуры, мы нашли группу преобразований, сохраняющую форму, и, следовательно, инварианты этой группы преобразований будут параметрами, определяющими форму фигуры.

Если рассмотреть геометрические свойства фигур с точки зрения дифференциальной геометрии, то одним из параметров определяющих форму фигуры, будет кривизна ее границы.

Рассмотрим плоские фигуры, границами которых служат плоские кривые без самопересечений. Кривизна плоской кривой заданной естественным параметрическим уравнением (параметром такого уравнения является s – длина дуги кривой) находится по формуле

$$k = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right| = \frac{\left|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}\right|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

Радиус кривизны $R = 1/k$ – величина, обратная кривизне.

Понятие кривизны для плоской кривой характеризует её представление с точностью до бесконечно малых второго порядка. Интуитивно это совпадает с нашими рассмотрениями связей формы кривой и наложений, которые мы проводили выше.

Обратим внимание, что если в плоском случае локальная кривизна плоской кривой характеризуется соприкасающейся окружностью, то в пространственном случае локальная кривизна поверхности – соприкасающимся параболоидом. Конечно, хорошо бы, чтобы кривизна поверхности характеризовалась не параболоидом, а сферой, но в этом случае мы ограничились бы поверхностями, имеющими равные главные кривизны, и исключили бы из рассмотрения такие широко используемые в машиностроении поверхности, как цилиндры, конусы, эллипсоиды и не только их.

Подводя итог проведенному исследованию математического моделирования воспроизведения плоской многосвязной фигуры, описываемой кусочно-аналитической кривой отметим, что отсутствие определения формы кривой и поверхности вызывает определенные трудности не только при геометрических исследованиях, но и при проектировании формообразующих технологических процессов, особенно в вопросах точности воспроизведения заданных конструктором формах.

Список литературы

1. Мялица А. К. Сравнительный анализ погрешностей переноса формы и размеров деталей по технологическому циклу / А. К. Мялица, С. А. Третьяков // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: ГАКУ "ХАИ". – 1999. – Вып. 11. – С. 285 – 290.

2. Науменко П. О. Компьютерное моделирование технологических измерений при изготовлении поверхностей детали и оснастки / П. О. Науменко, Р. В. Варнас // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2004. – Вып. 23. – С. 5 – 11.

3. Александров А. Д. Геометрия / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990. – 672 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. зав. каф. А.Г. Гребеников, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 20.01.09.