УДК 516:621.01 Е. Н. Бут, А. К. Мялица

Проблема моделирования переноса форм и размеров в машиностроении

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

В данной работе рассматриваются проблемы моделирования переноса форм и размеров для различных методов переноса и их модификаций. На сегодня в машиностроении известны и применяются три метода переноса форм и размеров: плазово-шаблонный метод, чертеж – токарный станок, аналитический эталон – оборудование с ЧПУ.

При плазово-шаблонном методе перенос форм и размеров от математической модели в форме плаза к деталям осуществляется графическими методами. Графические методы не требуют применения мерительных инструментов и не используют понятия масштаба. Фактически плаз представляет собой множество совмещенных сечений в масштабе 1:1.

При использовании метода «чертеж – токарный станок» математической моделью детали служит чертеж, на котором размеры детали задают числами. Под размером обычно понимают длину отрезка, которая удовлетворяет теореме о длине отрезка.

> *При произвольно выбранном отрезке е каждому отрезку a однозначно сопоставляется число $l(a)$ так, что выполняются условия:*

$$l(a) > 0,$$
$$\text{если } a = b, \text{ то } l(a) = l(b),$$
$$l(a + b) = l(a) + l(b),$$
$$l(\mathrm{e}) = 1.$$

Число $l(a)$ называется *численной длиной* отрезка a в *масштабе* e (как говорят, «длина 5 см» и т.п.). «*Число*» всегда означает действительное число.

Теорема о длине отрезка состоит из двух утверждений: существование длины и ее единственность при данном масштабе.

Таким образом, понятие размера как длины отрезка между двумя измеряемыми точками позволяет выражать размеры как числа, и эти числа являются характеристиками расстояний между точками деталей.

Иначе обстоит дело с понятием формы. Численной характеристики формы, аналогичной характеристике размера, к сожалению, не существует. Да и само понятие формы в геометрии определения не имеет. Форма в геометрии является первичным неопределяемым понятием, и сама геометрия определяется через форму [1].

Геометрия – раздел математики, изучающий пространственные формы и отношения.

Форма – внешние очертания, наружный вид предмета.

Очертания – вид чего-либо, образуемый линией, очерчивающей предмет.

Характеристики формы геометрических фигур геометрами не изучаются, более того, топология, как часть геометрии, изучает свойства фигур, в каком-то смысле не зависящие от формы. Так, тор и сфера с ручкой в топологическом смысле эквивалентны (рис. 1).

Однако практика, а именно технология машиностроения, требует решения вопроса о характеристиках формы, и поэтому проблемами характеристик формы вынуждены заниматься технологи. Так, фактически проблема близости форм рассматривается в работе [2] как погрешность формы детали (рис. 2).

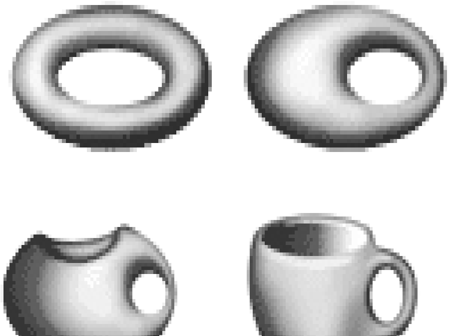

Рис. 1. Тор и сфера с ручкой

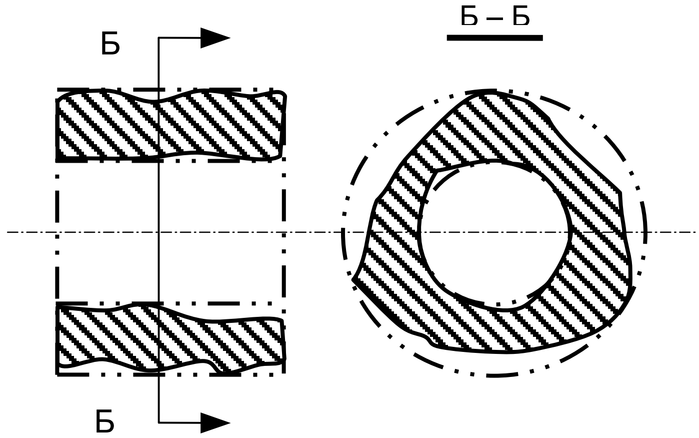

Рис. 2. Погрешности формы детали

В работе [2] указывается, что в случае сложных криволинейных форм точность размера не может служить характеристикой точности изготовления детали, которая характеризуется: соответствием действительного сечения теоретическому; положением контура сечения относительно теоретического.

В работе [3] на примере эллипса показано, что передача формы эллипса связана с передачей угла наклона касательной к нему, но дальнейших исследований по нахождению характеристик формы геометрических фигур нами не обнаружено.

Проблема определения точности передачи формы связана с введением характеристики близости форм. Близость форм в каком-то смысле можно рассматривать как расстояние между ними, и тогда для введения характеристики формы можно использовать понятие метрики.

Целью данной работы является исследование некоторых метрик с точки зрения приложения их в задачах оценки близости теоретической и изготовленной форм в машиностроении.

Проанализируем метрические пространства на предмет применения их для оценки отличия двух форм.

Метрика (расстояние) между двумя точками z_1, z_2 метрического пространства определяется однозначной неотрицательной функцией $\rho(z_1, z_2)$ со следующими тремя свойствами:

1) невырожденность, $\rho(z_1, z_2) \geq 0$, $\rho(z_1, z_1) = 0$ и, если $\rho(z_1, z_2) = 0$, то $z_1 = z_2$;
2) симметричность, $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$;

3) неравенство треугольника, $\rho(z_1, z_2) < \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2)$.

На вопрос «Какому метрическому пространству принадлежит Δr – стандартная погрешность размера r, – которая определяется как $\max(|r_i - r|)$, где r_i – возможные значения размера r?» получаем следующий ответ: «Такую метрику имеет пространство $C[a, b]$, элементами которого являются произвольные непрерывные в промежутке $[a, b]$ функции».

Кроме того, существует пространство $C^{(n)}$, элементы которого – функции, определенные в промежутке $[a, b]$ и имеющие в этом промежутке непрерывные производные до n-й включительно. Расстояние между объектами $z_1, z_2 \in C^{(n)}$ определяют как

$$\rho(z_1, z_2) = \sum_{0\le k\le n} \max_{a\le t\le b} \left| z_1^{(k)}(t) - z_2^{(k)}(t) \right|, \text{ где } z_1^{(0)}(t) = z_1(t),\ z_2^{(0)}(t) = z_2(t).$$

Рассмотрим чувствительность метрики пространств $C^{(n)}$ к задаче определения близости воспроизводимой и заданной форм. Для этого сравним представленные на рис. 3 поверхности цилиндров. Координаты, воспроизведенной поверхности цилиндра приведены в таблице.

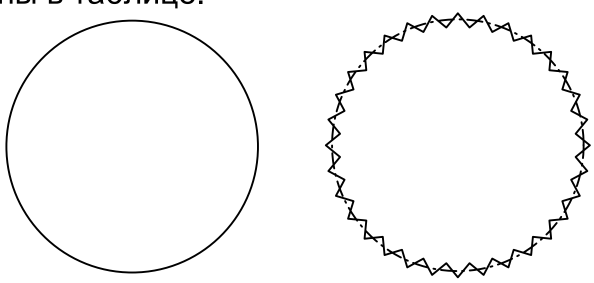

Рис. 3. Модели заданной и воспроизведенной поверхностей

Координаты зубчатого цилиндра

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	110,00	89,57	107,89	86,12	101,63	79,37	91,46	69,57	77,78	57,10
y	0,00	8,82	21,46	26,13	42,10	42,43	61,11	57,10	77,78	69,57
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	61,11	42,43	42,10	26,13	21,46	8,82	0,00	-8,82	-21,46	-26,13
y	91,46	79,37	101,63	86,12	107,89	89,57	110,00	89,57	107,89	86,12
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x	-42,10	-42,43	-61,11	-57,10	-77,78	-69,57	-91,46	-79,37	-101,63	-86,12
y	101,63	79,37	91,46	69,57	77,78	57,10	61,11	42,43	42,10	26,13
i	31	33	33	34	35	36	37	38	39	40
x	-107,89	-89,57	-110,00	-89,57	-107,89	-86,12	-101,63	-79,37	-91,46	-69,57
y	21,46	8,82	0,00	-8,82	-21,46	-26,13	-42,10	-42,43	-61,11	-57,10
i	41	44	43	44	45	46	47	48	49	50
x	-77,78	-57,10	-61,11	-42,43	-42,10	-26,13	-21,46	-8,82	0,00	8,82
y	-77,78	-69,57	-91,46	-79,37	-101,63	-86,12	-107,89	-89,57	-110,00	-89,57
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
x	21,46	26,13	42,10	42,43	61,11	57,10	77,78	69,57	91,46	79,37
y	-107,89	-86,12	-101,63	-79,37	-91,46	-69,57	-77,78	-57,10	-61,11	-42,43
i	61	62	63	64	65					
x	101,63	86,12	107,89	89,57	110,00					
y	-42,10	-26,13	-21,46	-8,82	0,00					

Координаты заданной поверхности удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} x = 100 * \cos\varphi, \\ y = 100 * \sin\varphi. \end{cases}$$

Используя данные таблицы, определим расстояние между заданной и воспроизведенной поверхностями в различных метрических пространствах. В качестве параметра t возьмем угол φ. Отклонение $z_1(\varphi) - z_2(\varphi)$ будем определять как расстояние между двумя точками объектов z_1, z_2, соответствующими одному и тому же углу φ.

В пространстве $C^{(0)}$ расстояние между исследуемыми цилиндрами, приведенными к одному центру будет равно 10.

В самом деле, минимальное расстояние между соответствующими точками на поверхностях цилиндров будет равно нулю, а максимальное – то +10, то -10.

В случае пространства $C^{(1)}$ расстояние между исследуемыми объектами увеличится на величину рассогласования производных по φ. Так как производная в случае достижения касательной вертикального положения равна ∞, то производить сравнение отклонений производных при углах φ, близких к $0 \pm \pi$, практически не представляется возможным.

В качестве аналога пространства $C^{(1)}$ рассмотрим пространство $AC^{(1)}$, в котором определим метрику как сумму метрики $C^{(0)}$ и максимума отклонения угла касательной к поверхности при одинаковом φ, т.е. расстояние между объектами z_1, $z_2 \in AC^{(1)}$ определим как

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{0 \le \varphi \le 2\pi}\left(\left|z_1(\varphi) - z_2(\varphi)\right|\right) + \max_{0 \le \varphi \le 2\pi}\left(\left|\alpha_1(\varphi) - \alpha_2(\varphi)\right|\right),$$

где $\alpha_i(\varphi)$ – угол касательной к поверхности объекта z_i в точке φ, $i = 1, 2$.

Вычисления показывают, что наибольшее отклонение угла касательной между заданным и воспроизведенным цилиндрами, равно 26,16 град.

Тогда расстояние между заданным и воспроизведенным цилиндрами равно 10 мм + 26,16 град. Но сложить разноименные величины нельзя, и поэтому необходимо перейти к безразмерным величинам. Для этого введем два весовых коэффициента w_1 и w_2. Размерность первого коэффициента 1/мм, второго – 1/град. Если предположить равенство весов (одинаковое влияние на форму и размер у первого и второго слагаемых), то тогда расстояние между первым и вторым цилиндрами равно – 36,16.

В случае если оба цилиндра круговые и различаются только радиусами, то расстояние между ними равно – 10. В самом деле, углы касательной при одинаковом φ у обоих цилиндров одинаковы и отклонение равно нулю.

Таким образом, второе слагаемое в метрике пространства $AC^{(1)}$ характеризует отклонение от формы.

Однако если рассмотреть расстояние между двумя дугами окружностей радиусом 100, смещенными друг относительно друга на 10 по оси X и повернутыми на угол π/4, то окажется что расстояние между ними не равно нулю, хотя очевидно, что это одна и та же дуга (рис. 4).

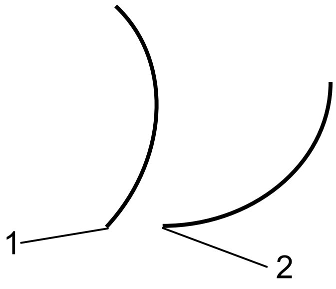

Рис. 4. Две дуги

Уравнения этих дуг будут следующими:

Первая дуга

$$\begin{cases} x = (\widehat{x} - x_0)\cos\alpha + (\widehat{y} - y_0)\sin\alpha + x_0, \\ y = (\widehat{y} - y_0)\cos\alpha - (\widehat{x} - x_0)\sin\alpha + y_0. \end{cases} \text{где} \begin{cases} \widehat{x} = R\sin\varphi - \delta \\ \widehat{y} = -R\cos\varphi \end{cases}$$

Вторая дуга $\begin{cases} x = R\sin\varphi, \\ y = -R\cos\varphi. \end{cases}$

Первое слагаемое при определении расстояния между дугами принимает следующие значения:

φ	0	4,5	9,0	13,5	18	22,5	27	31,5	36	40,5	45
s	10,0	18,8	30,4	42,4	54,3	66,0	77,4	88,3	98,6	108,4	117,5

Второе слагаемое также изменяется

φ	0	4,5	9,0	13,5	18	22,5	27	31,5	36	40,5	45
s	-45	-36	-27	-18	-9	0	9	18	27	36	45

Несмотря на то, что мы измеряли расстояние между конгруэнтными дугами, оба слагаемых расстояния изменяются. Следовательно, ни первое, ни второе слагаемое рассматриваемой метрики не содержат информацию о форме дуги в явном виде.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что значения функции и ее производных содержат информацию о форме кривой в неявном виде. Для того, чтобы по значениям второго слагаемого введенной метрики сделать заключение о близости двух форм, их необходимо расположить каким-то специальным образом.

Подводя итоги данного исследования, следует указать, что для отражения свойств формы кривой или поверхности уместно исследовать такие свойства кривых и поверхностей как кривизна. Проблема определения близости форм пока остается нерешенной, но ее решение крайне необходимо в приложениях компьютерных геометрий, используемых в машиностроении.

Список литературы

1. Большой толковый словарь русского языка / Сост. и гл. ред. С. А. Кузнецов. – СПб.: Норинт, 1998. – 1536 с.
2. Беликов С. И. Допуски, посадки и технические измерения в производстве летательных аппаратов / С. И. Беликов, Н. А. Докунина, Н. Н. Бурдина. – М.: Оборонгиз, 1963. – 292 с.
3. Науменко П. О. Технологические измерения в самолетостроительном производстве и их метрологическое обеспечение / П. О. Науменко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ "ХАИ". – 2003. – Вып. 19. – С. 18 – 23.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. зав. каф. А.Г. Гребеников, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.