

Влияние эксцентриситета подкрепляющего набора на напряженное состояние панели при краевых условиях, допускающих разделение переменных

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Введение

Увеличивающиеся сложность и дороговизна изделий авиапромышленного комплекса повышают требования к качеству проектирования и анализу авиационных конструкций. Эффективность проектирования этих конструкций существенно зависит от точности методов определения их напряженного состояния. В целом следует отметить, что основной проблемой, стоящей в настоящее время в естествознании, является проблема достоверности и точности получаемых результатов, что связано с адекватностью применяемых математических моделей.

Стрингерные панели – одни из наиболее распространенных элементов силовых каркасов летательных аппаратов, составляющие до 80% от их массы.

Малоизученным на сегодня является вопрос о степени влияния эксцентриситета подкрепляющего набора на точность определения напряженного состояния панели и ее критических параметров потери устойчивости. Это связано с тем, что точные аналитические решения для подкрепленных пластин можно получить в очень редких случаях, а наличие эксцентриситета подкрепляющих ребер приводит к дополнительным сложностям. Вопрос заключается в том, что наличие эксцентриситета подкрепляющего набора не позволяет разделить плоскую задачу теории упругости и задачу изгиба.

Что же касается моделирования способа контакта одномерных и двумерных элементов, то, как показано в работах [1], [2], для достаточно тонких ребер можно считать, что взаимодействие между отмеченными элементами происходит по линии. Эта модель принимается и в данной работе.

Задача об устойчивости подкрепленной пластины была, по-видимому, впервые поставлена и решена энергетическим методом в 1915 г. С.П. Тимошенко. Исходное напряженное состояние он принимал однородным, что, во-первых, не так. Во-вторых, С.П.Тимошенко без всякого обоснования не учел энергию мембранных полей напряжений, дополнительно возникающих при выпучивании системы. При этом он рекомендовал вычислять моменты инерции ребра относительно линии нижних волокон пластины [3, с. 385]. Аналогично поступал и Л.Г. Доннелл. Однако он без обоснования рекомендовал вычислять момент инерции ребер иначе [4, с. 266, формула (4.76)]. В работе [2] исходное поле также полагалось однородным, то есть задача определения исходного поля напряжений не рассматривалась. Принималось допущение о том, что в исходном состоянии ребро и оболочка проскальзывают друг относительно друга, что очевидно неприемлемо.

Целью настоящей работы является моделирование упругого контакта прямоугольной пластины и ребра с учетом эксцентриситета последнего, а также

численное исследование влияния величины эксцентриситета на соотношение изгибных и мембранных напряжений в пластине.

1 Моделирование упругого контакта пластины и ребра

Рассматривается задача определения исходного напряженного состояния эксцентрично подкрепленной пластины при краевых условиях на краях, перпендикулярных ребрам, допускающих разделение переменных. Задача решается методом сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ), согласно которому панель расчленяется на отдельные пластинчатые фрагменты и ребра (рис.1), имеющие постоянные геометрические и жесткостные параметры.

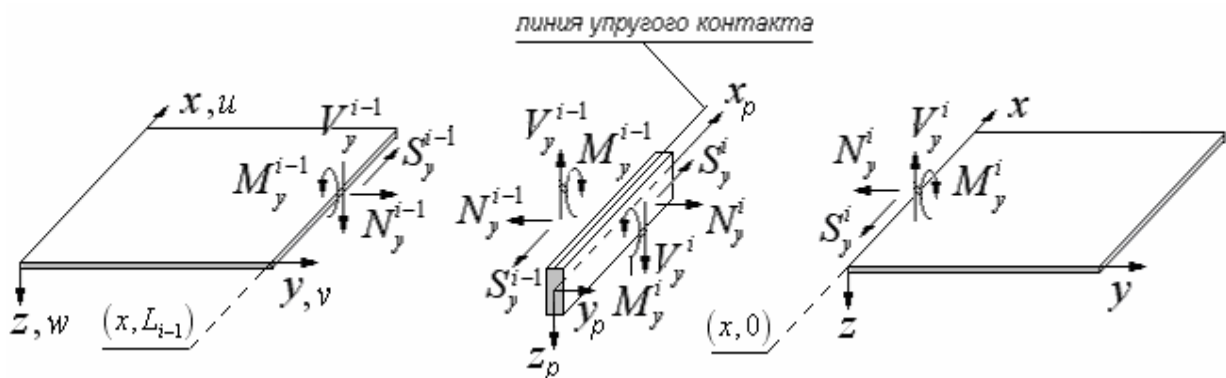


Рисунок 1 – К построению модели упругого контакта пластины и ребра

Совместная работа на изгиб и растяжение – сжатие системы «пластина – ребро» моделируется следующим образом: на краях фрагментов, по которым происходит упругое взаимодействие с другими фрагментами, задаются неизвестные системы контактных перемещений $u(x, y=c)$, $v(x, y=c)$, $w(x, y=c)$ и углов поворотов центров тяжести сечений $\theta(x) = \partial w / \partial y$. Для каждого такого пластинчатого фрагмента независимо строятся решения плоской задачи теории упругости и задачи изгиба. Затем с двух соседних пластинчатых фрагментов на ребро передаются распределенные по линии контакта погонные усилия и моменты, соответствующие построенным полям перемещений. Полученные решения сопрягаются на ребре путем выполнения статических условий контакта (при этом кинематические условия контакта выполняются автоматически). Это позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных контактных перемещений. Так определяется напряженное состояние всей системы в целом.

2 Построение решений плоской задачи теории упругости и задачи изгиба

2.1 Определение плоского поля напряжений

Решается плоская задача теории упругости в перемещениях в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, H), y \in (0, L)\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

при следующих краевых условиях (рис. 2):

$$u(x, 0) = \Theta(x) = \theta_0 + \sum_{k=1} \theta_k \cos \frac{k\pi x}{H}, \quad u(x, L) = \Xi(x) = \xi_0 + \sum_{k=1} \xi_k \cos \frac{k\pi x}{H}, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = \Psi(x) = \sum_{k=1} \psi_k \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad v(x, L) = \Upsilon(x) = \sum_{k=1} \gamma_k \sin \frac{k\pi x}{H};$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) &= \sigma_1, & \sigma_x(H, y) &= \sigma_2, \\ v(0, y) &= 0, & v(H, y) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u = u(x, y), v = v(x, y)$ – тангенциальные компоненты вектора перемещений срединной плоскости пластины; μ – коэффициент Пуассона; $\Theta(x), \Psi(x), \Xi(x), \Upsilon(x)$ – представленные в виде тригонометрических рядов функции неизвестных контактных перемещений; σ_1, σ_2 – нормальные напряжения, действующие на горизонтальных сторонах области.

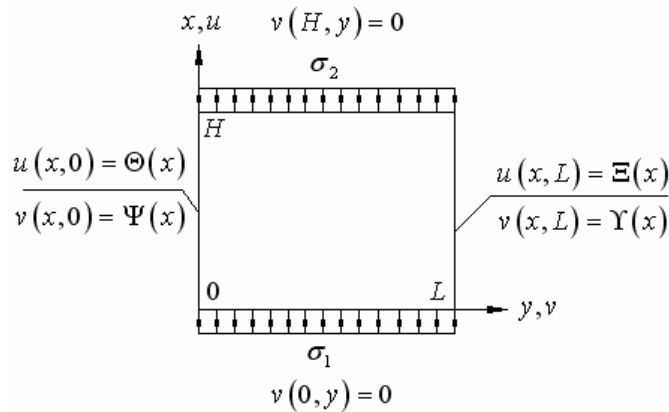


Рисунок 2 – К плоской задаче теории упругости

Решение задачи (1) – (3) строится методом суперпозиции: сначала выписываются функции, удовлетворяющие краевым условиям (3) и не удовлетворяющие уравнениям (1). Затем методом Власова – Канторовича решается краевая задача, в которой необходимо удовлетворить условиям (2) и уравнениям (1), в которых появляются правые части.

В результате искомые кинематические функции, выраженные через неизвестные контактные перемещения, выписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(1-\mu^2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{2EH} \cdot x^2 + \frac{(1-\mu^2)\sigma_1}{E} \cdot x + \\ &+ \sum_{k=1} \{(\theta_k - \omega_k) \cdot T_{1,k}(y) + \psi_k \cdot T_{2,k}(y) + (\xi_k - \omega_k) \cdot T_{3,k}(y) + \gamma_k \cdot T_{4,k}(y)\} \cdot \cos \frac{k\pi x}{H}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1} \{ (\theta_k - \omega_k) \cdot S_{1,k}(y) + \psi_k \cdot S_{2,k}(y) + (\xi_k - \omega_k) \cdot S_{3,k}(y) + \gamma_k \cdot S_{4,k}(y) \} \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad (5)$$

где E – модуль Юнга пластины; $\omega_k = 2(1 - \mu^2)H [(-1)^k \sigma_2 - \sigma_1] / E(k\pi)^2$; $T_{j,k}(y)$, $S_{j,k}(y)$, $j = \overline{1,4}$ – явно выписываемые функции класса $C^\infty(0, L)$, являющиеся комбинациями гиперболических функций. Функции $T_{j,k}(y)$, $S_{j,k}(y)$ характеризуют поведение вдоль координаты y заданных на сторонах $y=0, y=L$ гармоник неизвестных контактных перемещений. Эти функции зависят только от размеров области и характеристик материала. Для наглядности на рис. 3 приведен вид функций $T_{j,k}(y)$ на интервале $y \in [0, 1]$ при $L = H = 1$ и $\mu = 0.3$.

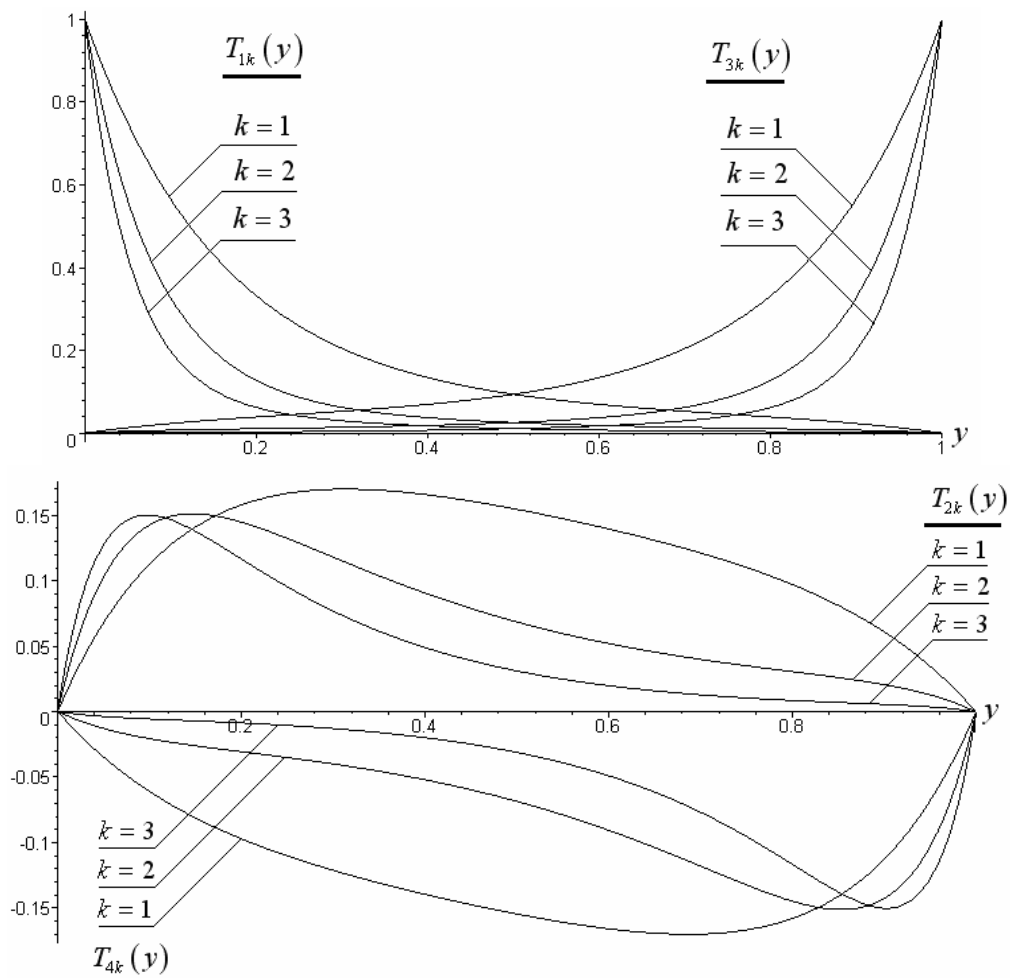


Рисунок 3 – Поведение функций $T_{j,k}(y)$, $j = \overline{1,4}$ на интервале $y \in [0, 1]$

2.2 Определение изгибного поля напряжений

В прямоугольной области Ω ищется решение краевой задачи, описывающей изгиб без поперечной нагрузки свободно опертой по двум горизонтальным сторонам пластины, у которой на вертикальных сторонах заданы произвольные системы перемещений и нормальных углов поворота:

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = 0 \text{ в } \Omega; \quad (6)$$

$$w(0,y) = 0, M_x(0,y) = 0, \quad w(H,y) = 0, M_x(H,y) = 0; \quad (7)$$

$$w(x,0) = \sum_{k=1} A_k \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad w(x,L) = \sum_{k=1} C_k \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = \sum_{k=1} B_k \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x,L) = \sum_{k=1} D_k \sin \frac{k\pi x}{H},$$

где $w(x,y)$ – искомая функция прогибов; $M_x(x=const,y)$ – распределенный изгибающий момент; A_k, B_k, C_k, D_k – неопределенные коэффициенты тригонометрических рядов, определяющих произвольно заданные на краях $y=0, y=L$ системы контактных перемещений.

Решая задачу (6) – (8) методом Власова-Канторовича, функцию $w(x,y)$ получаем в следующем виде:

$$w(x,y) = \sum_{k=1} \{A_k \cdot \Gamma_{A,k}(y) + B_k \cdot \Gamma_{B,k}(y) + C_k \cdot \Gamma_{C,k}(y) + D_k \cdot \Gamma_{D,k}(y)\} \sin \frac{k\pi x}{H}, \quad (9)$$

где $\Gamma_{A,k}(y), \Gamma_{B,k}(y), \Gamma_{C,k}(y), \Gamma_{D,k}(y)$ – явно выписываемые функции класса $C^\infty(0,L)$, являющиеся комбинациями гиперболических функций. Как и функции $T_{j,k}(y), S_{j,k}(y)$, эти функции зависят только от размеров области и характеристик материала пластины.

Функции $\Gamma_{A,k}(y), \Gamma_{B,k}(y), \Gamma_{C,k}(y), \Gamma_{D,k}(y)$ определяют поведение вдоль координаты y заданных на сторонах $y=0, y=L$ гармоник неизвестных контактных перемещений (8). Вид этих функций для первых гармоник при $L=H=1$ и $\mu=0.3$ приведен на рис. 4.

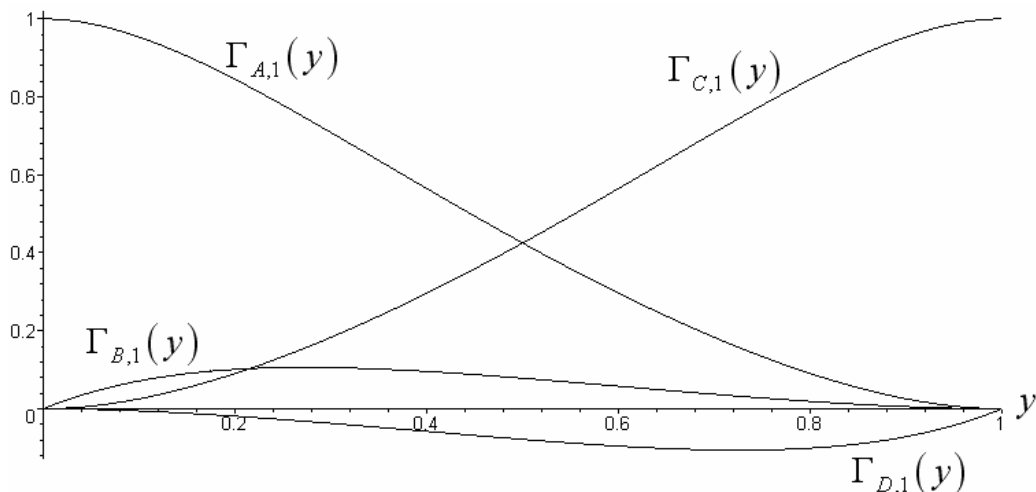


Рисунок 4 – Поведение функций $\Gamma_{A,k}(y), \Gamma_{B,k}(y), \Gamma_{C,k}(y), \Gamma_{D,k}(y)$ ($k=1$) на интервале $y \in [0; 1]$

3 Получение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений

Как говорилось выше, за счет наличия эксцентриситета при растяжении – сжатии пластины помимо полей перемещений $u(x, y)$, $v(x, y)$ (4), (5) дополнительно возникают изгибные перемещения $w(x, y)$ (9). Построенные для пластинчатых фрагментов функции перемещений (4), (5), (9), через которые однозначно определяются поля напряжений, содержат счетное число произволов, необходимых для удовлетворения условиям совместности, которые формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{p,i}(x) &= u_{i-1}(x) \Big|_{y=L_{i-1}} - \frac{\delta + \delta_p}{2} \cdot \frac{\partial w_{i-1}(x)}{\partial x} \Big|_{y=L_{i-1}} = u_i(x) \Big|_{y=0} - \frac{\delta + \delta_p}{2} \cdot \frac{\partial w_i(x)}{\partial x} \Big|_{y=0}; \\ v_{p,i}(x) &= v_{i-1}(x) \Big|_{y=L_{i-1}} - \frac{\delta + \delta_p}{2} \cdot \frac{\partial w_{i-1}(x)}{\partial x} \Big|_{y=L_{i-1}} = v_i(x) \Big|_{y=0} - \frac{\delta + \delta_p}{2} \cdot \frac{\partial w_i(x)}{\partial x} \Big|_{y=0}; \\ w_{p,i}(x) &= w_{i-1}(x, L_{i-1}) = w_i(x, 0), \quad \theta_{p,i}(x) = \theta_{i-1}(x, L_{i-1}) = \theta_i(x, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Распределенные усилия и моменты упругого взаимодействия пластины и ребра приводятся к главной центральной оси ребра (рис. 5):

$$\begin{aligned} q_x(x) &= \delta [\tau_i(x) - \tau_{i-1}(x)]; & m_x(x) &= \{M_i(x) - M_{i-1}(x)\} - \delta \frac{\delta_p}{2} [\sigma_i(x) - \sigma_{i-1}(x)]; \\ q_y(x) &= \delta [\sigma_i(x) - \sigma_{i-1}(x)]; & m_y(x) &= \delta \frac{\delta_p}{2} [\tau_i(x) - \tau_{i-1}(x)]; \\ q_z(x) &= V_i(x) - V_{i-1}(x); & m_z(x) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma_j(x)$, $\tau_j(x)$ – функции нормальных и касательных напряжений, определяемые полями перемещений (4), (5); $\tau_{i-1}(x) = \tau_{i-1}(x, L_{i-1})$; $\tau_i(x) = \tau_i(x, 0)$, аналогично для других распределенных силовых факторов; $M_j(x)$, $V_j(x)$ – функции распределенных моментов и перерезывающих сил по Кирхгофу соответственно, определяемые полем (9); δ – толщина пластины; $\delta_p/2$ – расстояние от нижних волокон пластины до центральной оси ребра.



Рисунок 5 – Приведение усилий упругого взаимодействия к центральной оси ребра

Уравнения равновесия i -го ребра имеют вид:

$$\begin{aligned}
EF_p \cdot u_p''(x) &= -q_x(x); \\
EI_z \cdot v_p^{IV}(x) &= q_y(x) - m_z'(x); \\
EI_y \cdot w_p^{IV}(x) &= q_z(x) + m_y'(x); \\
GI_{kp} \cdot \theta_p''(x) &= -m_x(x),
\end{aligned}
\tag{12}$$

где I_y, I_z, I_{kp} – центральные моменты инерции относительно осей y, z и полярный момент соответственно поперечного сечения ребра; F_p – площадь поперечного сечения ребра; E, G – соответственно модули упругости и сдвига материала ребра.

Подстановка в уравнения (12) функций (4), (5), (9) с учетом соотношений (10) после некоторых преобразований, которые ввиду их громоздкости в данной работе не приводятся, позволяет получить блочно-диагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров краевых условий (2) и (8). Решение полученной системы полностью определяет напряженное состояние панели.

4 Численное исследование влияния величины эксцентриситета на напряженное состояние панели

Рассматривается пластина толщиной δ , длиной $L_1 + L_2$, шириной H с одним ребром размерами $\delta_p \times h$ (рис. 6). Механические характеристики материала пластины и ребра одинаковы: $E = 72 \text{ ГПа}$, $\mu = 0.3$. Величины напряжений вдоль горизонтальных сторон: $\sigma_1 = 150 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 100 \text{ МПа}$. Горизонтальные стороны пластины свободно оперты, вертикальные – жестко защемлены.

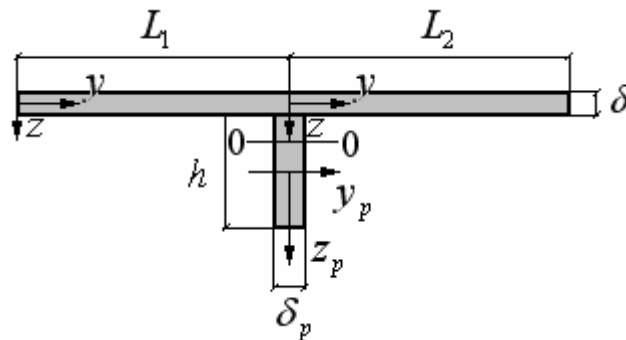


Рисунок 6 – Пластина и ребро

Для анализа вводятся следующие безразмерные параметры:

$$k_F = \frac{F^p}{F^{nl}} = \frac{\delta_p h}{\delta(L_1 + L_2)};$$

$k_I = \frac{I_{0-0}^{nl}}{I_{0-0}^p}$, где I_{0-0}^{nl}, I_{0-0}^p – величины моментов инерции площадей F^{nl} и F^p соответственно относительно центральной оси 0-0 площади $F^{nl} + F^p$;

$k_\sigma = \frac{\sigma_x^u}{\sigma_x^m}$, где σ_x^u, σ_x^m – величины изгибных и мембранных напряжений вдоль оси x панели в заданной точке.

Пример 1. $L_1 = L_2 = 0.2$ м, $H = 0.5$ м. Имеется ребро постоянной толщины $F_p = 100$ мм² при различных его размерах. Величины относительных параметров k_F, k_I, k_σ (в середине линии упругого контакта) при различных величинах толщины пластины δ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения параметра k_σ в зависимости от величины k_I при $k_F = const$

| $F_p = 100$ мм ² | $\delta = 0.002$ м $k_F = 0.125$ | $\delta = 0.003$ м $k_F = 0.083$ | $\delta = 0.004$ м $k_F = 0.063$ | $\delta = 0.005$ м $k_F = 0.050$ |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $h = 0.015$ м $\delta_p \square 0.007$ м | $k_I = 0.072$ $k_\sigma = 0.077$ | $k_I = 0.230$ $k_\sigma = 0.050$ | $k_I = 0.517$ $k_\sigma = 0.032$ | $k_I = 0.953$ $k_\sigma = 0.021$ |
| $h = 0.020$ м $\delta_p = 0.005$ м | $k_I = 0.042$ $k_\sigma = 0.069$ | $k_I = 0.135$ $k_\sigma = 0.040$ | $k_I = 0.308$ $k_\sigma = 0.024$ | $k_I = 0.576$ $k_\sigma = 0.016$ |
| $h = 0.025$ м $\delta_p = 0.004$ м | $k_I = 0.027$ $k_\sigma = 0.061$ | $k_I = 0.089$ $k_\sigma = 0.033$ | $k_I = 0.204$ $k_\sigma = 0.019$ | $k_I = 0.385$ $k_\sigma = 0.013$ |
| $h = 0.030$ м $\delta_p \square 0.003$ м | $k_I = 0.019$ $k_\sigma = 0.053$ | $k_I = 0.063$ $k_\sigma = 0.028$ | $k_I = 0.145$ $k_\sigma = 0.012$ | $k_I = 0.275$ $k_\sigma = 0.011$ |

Пример 2. $L_1 = L_2 = 0.2; 0.25; 0.3$ м; $H = 0.5$ м. Пусть $\lambda = \frac{(L_1 + L_2)}{H}$. Влияние соотношений размеров пластины и ребра на параметры k_F, k_I, k_σ приведено в таблице 2. Рассматриваемая точка – середина линии упругого контакта.

Таблица 2 – Значения параметра k_σ при различных значениях k_I, k_F

| $h, \delta_p,$ м | $\delta = 0.002$ м | | | $\delta = 0.003$ м | | |
|-----------------------------------|--|--|--|--|--|--|
| | $\lambda = 0.8$ | $\lambda = 1$ | $\lambda = 1.2$ | $\lambda = 0.8$ | $\lambda = 1$ | $\lambda = 1.2$ |
| $h = 0.015$ $\delta_p = 0.005$ | $k_F = 0.094$ $k_I = 0.097$ $k_\sigma = 0.059$ | $k_F = 0.075$ $k_I = 0.121$ $k_\sigma = 0.042$ | $k_F = 0.063$ $k_I = 0.145$ $k_\sigma = 0.030$ | $k_F = 0.063$ $k_I = 0.308$ $k_\sigma = 0.032$ | $k_F = 0.050$ $k_I = 0.385$ $k_\sigma = 0.025$ | $k_F = 0.042$ $k_I = 0.462$ $k_\sigma = 0.020$ |
| $h = 0.020$ $\delta_p = 0.005$ | $k_F = 0.125$ $k_I = 0.042$ $k_\sigma = 0.069$ | $k_F = 0.100$ $k_I = 0.052$ $k_\sigma = 0.048$ | $k_F = 0.083$ $k_I = 0.063$ $k_\sigma = 0.034$ | $k_F = 0.083$ $k_I = 0.136$ $k_\sigma = 0.040$ | $k_F = 0.067$ $k_I = 0.170$ $k_\sigma = 0.031$ | $k_F = 0.056$ $k_I = 0.203$ $k_\sigma = 0.024$ |
| $h = 0.025$ $\delta_p = 0.005$ | $k_F = 0.156$ $k_I = 0.022$ $k_\sigma = 0.077$ | $k_F = 0.125$ $k_I = 0.027$ $k_\sigma = 0.053$ | $k_F = 0.104$ $k_I = 0.033$ $k_\sigma = 0.037$ | $k_F = 0.104$ $k_I = 0.071$ $k_\sigma = 0.047$ | $k_F = 0.083$ $k_I = 0.089$ $k_\sigma = 0.036$ | $k_F = 0.069$ $k_I = 0.107$ $k_\sigma = 0.028$ |

Окончание таблицы 2

| $h, \delta_p,$ m | $\delta = 0.002 \text{ м}$ | | | $\delta = 0.003 \text{ м}$ | | |
|-----------------------------------|--|--|--|--|--|--|
| | $\lambda = 0.8$ | $\lambda = 1$ | $\lambda = 1.2$ | $\lambda = 0.8$ | $\lambda = 1$ | $\lambda = 1.2$ |
| $h = 0.030$ $\delta_p = 0.005$ | $k_F = 0.187$ $k_I = 0.013$ $k_\sigma = 0.084$ | $k_F = 0.150$ $k_I = 0.016$ $k_\sigma = 0.056$ | $k_F = 0.125$ $k_I = 0.019$ $k_\sigma = 0.039$ | $k_F = 0.125$ $k_I = 0.042$ $k_\sigma = 0.053$ | $k_F = 0.100$ $k_I = 0.052$ $k_\sigma = 0.040$ | $k_F = 0.083$ $k_I = 0.063$ $k_\sigma = 0.031$ |
| $h = 0.050$ $\delta_p = 0.005$ | $k_F = 0.313$ $k_I = 0.003$ $k_\sigma = 0.110$ | $k_F = 0.250$ $k_I = 0.004$ $k_\sigma = 0.069$ | $k_F = 0.208$ $k_I = 0.005$ $k_\sigma = 0.062$ | $k_F = 0.208$ $k_I = 0.008$ $k_\sigma = 0.072$ | $k_F = 0.150$ $k_I = 0.012$ $k_\sigma = 0.052$ | $k_F = 0.139$ $k_I = 0.014$ $k_\sigma = 0.040$ |

Выводы

Как видно из рассмотренных примеров, отношение мембранных напряжений к изгибным мало и не превышает 10% при $k_F \leq 0.300$ и $k_I \geq 0.003$. При значениях относительных параметров $k_F \leq 0.155$ и $k_I \geq 0.010$ величина k_σ не превышает 6%. Это означает, что влиянием изгибных напряжений по сравнению с мембранными напряжениями можно пренебречь. В указанном диапазоне величин k_F и k_I учет эксцентриситета, существенно увеличивая сложность расчетов, не приводит к значительному повышению точности в определении напряженного состояния. В таком случае можно рассматривать подкрепляющий набор в виде одномерных упругих элементов, оси которых лежат в срединной плоскости пластины, и использовать решение, которое построено в работе [5].

В заключение автор выражает глубокую благодарность С.А. Халилову за постановку задачи, конструктивную критику и постоянную помощь в работе.

Список литературы

1. Халилов С.А. К обоснованию схемы взаимодействия по линии в ребристых пластинах и оболочках / С.А. Халилов // Самолетостроение. Техника воздушного флота: Республ. межвед. науч.-техн. сб. – Х.: Вища школа. – 1979. – Вып. 45. с.55-60.
2. Амиро И.Я. Методы расчета оболочек: в 2т. / И.Я. Амиро, В.А.Заруцкий. Т.2: Теория ребристых оболочек. – К.: Наук.думка, 1980. – 368 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во науч.-теор. лит., 1980. – 568 с.
4. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки: пер.с англ./ под ред. Э.И. Григолюка, – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1982. – 568 с.
5. Халилов С.А. К определению плоского напряженного состояния прямоугольной стрингерной пластинки / С.А. Халилов, А.Г. Дибир // Вопросы оптимизации тонкостенных силовых конструкций летательных аппаратов. – Х: ХАИ, 1983. – Вып.4. с.76-86.

Рецензент: д-р физ-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.