УДК 621.793 С. Д. Младинов

Оптимизация параметров линейной аппроксимации зависимости $\sigma - \varepsilon$ в пластической области деформаций

АНТК им. О. К. Антонова

При анализе процессов упругопластического формообразования тонкостенных деталей самолетных конструкций возникает ряд расчетных задач, от правильного решения которых зависит точность и технологичность их изготовления. К основным задачам следует отнести расчет силовых факторов и упругой отдачи (пружинение) деталей при различных схемах упругопластического изгиба, а также, что особо следует отметить, вид аналитической зависимости «напряжение-деформация» (в дальнейшем $\sigma - \varepsilon$).

Исследования процессов упругопластического формообразования деталей основывается на экспериментальных данных, получаемых при испытании конструкционных материалов на растяжение. При этом устанавливают статически осредненные основные характеристики механических свойств материала (условные напряжения, условные деформации и др.), через которые определяются истинные значения напряжений и относительных деформаций. Затем индикаторные данные аппроксимируют различными формулами полностью или по частям и получают зависимость $\sigma - \varepsilon$ в интересующем диапазоне деформаций.

Аналитические исследования в данной статье основаны на теоретических положениях, изложенных в работах А.А. Ильюшина [1], Лысова и И.М. Закирова [2, 3] и др., где рассмотрены теория малых упругопластических деформаций и вопросы упругопластического изгиба деталей из листа и профиля.

Для большинства конструкционных материалов, применяемых в самолетостроении, наиболее точной аналитической зависимостью $\sigma - \varepsilon$ при растяжении считается в области упругих деформаций линейная зависимость

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1}$$

и в области пластических деформаций степенная зависимость

$$\sigma_s = K\varepsilon^n, \tag{2}$$

с пересечением их в точке $\varepsilon_S = \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{1}{1-n}}$.

Константы n и K с высокой точностью можно определить через механические характеристики материала $n = \lg\left(\frac{\sigma_{\text{â}}}{\sigma_{\text{ò}}}\right) / \lg\left(\frac{\varepsilon_{\text{â}}}{\varepsilon_{\text{ò}}}\right)$, $K = \frac{\sigma_{\text{â}}}{\varepsilon_{\text{â}}^{\,n}}$, где $\sigma_{\text{ò}}, \varepsilon_{\text{ò}}, \sigma_{\text{â}}, \varepsilon_{\text{â}}$ – напряжения и деформации предела текучести и предела прочности.

Точность расчёта при аппроксимации степенной зависимостью в пластической области, как показывает практика, не превышает 3%. При относительно больших деформациях (более 5%), например, при изгибе на большую кривизну уменьшается толщина упругого слоя. В этом случае может быть принята степенная аппроксимация на всём диапазоне деформаций без значительной потери точности расчётов.

Степенная аппроксимация в пластической области не всегда удобна при расчёте параметров формообразования деталей. Так, например, расчёт положения нейтрального слоя при изгибе несимметричных сечений приводит нелинейному (с дробной степенью), громоздкому уравнению. Поэтому в таких случаях целесообразно применять линейную аппроксимацию пластической области.

Для упрощения расчётов параметров в задачах упругопластического деформирования в [2, 3] принята линейно-полигональная зависимость $\sigma-\varepsilon$ в пластической области в виде

$$\sigma=\sigma_0+E_M\varepsilon, \tag{3}$$

где ε_M – максимальная деформация;

$\sigma_0=\sigma_M-E_M\varepsilon$ – условное напряжение в точке $\varepsilon=0$;

$E_M=\dfrac{\sigma_M-\sigma_T}{\varepsilon_M-\varepsilon_T}$ – модуль линейного упрочнения в диапазоне $\varepsilon_M-\varepsilon_T$.

Линейно-полигональная зависимость по сравнению со степенной зависимостью менее точна, но существенно упрощает расчёты параметров формообразования. Для повышения расчётной точности зависимости (3) разбивают диаграмму $\sigma-\varepsilon$ на линейные участки, с близкими к решаемой задаче деформациями.

Цель данной работы – получить линейную аналитическую зависимость $\sigma-\varepsilon$, сравнимую по точности в пластическом диапазоне деформаций со степенной зависимостью и избавиться от громоздких выражений при расчётах параметров формообразования деталей. Для решения поставленной задачи предлагается линейную зависимость $\sigma-\varepsilon$ представить в следующем виде:

– в области упругих деформаций $\sigma=E\varepsilon$;

– в области пластических деформаций в диапазоне $\left[\varepsilon_S-\varepsilon_M\right]$

$$\sigma_\lambda=E\left[\varepsilon-\lambda\left(\varepsilon-\varepsilon_\lambda\right)\right],\ 0\le\lambda\le1 \tag{4}$$

или

$$\sigma_\lambda=\sigma_{0\lambda}+E_M\varepsilon, \tag{5}$$

где $\sigma_{0\lambda}=E\lambda\varepsilon_\lambda$ – условное напряжение в точке $\varepsilon=0$;

$E_M=E\left(1-\lambda\right)$ – модуль линейного упрочнения;

ε_M – максимальная деформация.

Параметры предлагаемой линейной зависимости – $\lambda,\varepsilon_\lambda$ определяем из условия минимума квадратичного отклонения зависимостей $Q=\int\limits_{\varepsilon_S}^{\varepsilon_M}\left(\sigma_\lambda-\sigma_s\right)^2 d\varepsilon$ на диапазоне деформаций $\left[\varepsilon_S-\varepsilon_M\right]$.

Выражение Q принимает минимальное значение при условии равенства частных производных нулю по искомым параметрам, т.е. $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0$ и $\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon_\lambda} = 0$.

$$E\int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_M}\left[\varepsilon-\lambda\left(\varepsilon-\varepsilon_\lambda\right)\right]d\varepsilon - K\int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_M}\varepsilon^n d\varepsilon = 0,$$
$$E\int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_M}\left[\varepsilon-\lambda\left(\varepsilon-\varepsilon_\lambda\right)\right]\varepsilon d\varepsilon - K\int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_M}\varepsilon^n \varepsilon d\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Выполнив необходимые преобразования системы уравнений (6), получим параметры линейной аппроксимации λ и ε_λ, выраженные через параметры степенной аппроксимации (2)

$$\lambda = 1 - \frac{6K}{E}\frac{2\left(\varepsilon_M^{n+2}-\varepsilon_S^{n+2}\right)(n+1)-\left(\varepsilon_M+\varepsilon_S\right)\left(\varepsilon_M^{n+1}-\varepsilon_S^{n+1}\right)(n+2)}{(n+1)(n+2)\left[4\left(\varepsilon_M^3-\varepsilon_S^3\right)-3\left(\varepsilon_M+\varepsilon_S\right)\left(\varepsilon_M^2-\varepsilon_S^2\right)\right]},$$
$$\varepsilon_\lambda = \frac{K\left(\varepsilon_M^{n+1}-\varepsilon_S^{n+1}\right)}{\lambda E(n+1)\left(\varepsilon_M-\varepsilon_S\right)} - \frac{(1-\lambda)\left(\varepsilon_M+\varepsilon_S\right)}{2\lambda}. \tag{7}$$

Параметры линейной зависимости (4) можно получить и непосредственно по данным диаграмм растяжения опытных образцов, используя выражение $Q_i = \frac{1}{E^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_\lambda-\sigma_i\right)^2$ с условием $\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda} = 0$ и $\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon_\lambda} = 0$

$$\lambda = 1 - \frac{\frac{1}{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sum_{i=1}^{N}\sigma_i - N\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\varepsilon_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\right)^2 - N\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2},\ \varepsilon_\lambda = \frac{\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i-(1-\lambda)\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i}{\lambda N}. \tag{8}$$

Анализ уравнений (6) показывает, что первое уравнение равносильно равенству работ, выполняемые, соответственно, напряжениями зависимостей $\sigma-\varepsilon$ (2) и (4) на диапазоне деформаций $\left[\varepsilon_S-\varepsilon_M\right]$, а второе – равенству моментов напряжений относительно начала координат. Второе уравнение оптимизирует параметры линейной зависимости в задачах упругопластического изгиба, например, при расчёте остаточной кривизны.

Для построения диаграмм и графиков, представленных на рис. 1 и рис. 2, исходные данные были рассчитаны по выше представленным зависимостям, с использованием механических характеристик (наиболее распространенных в самолетостроении) материалов – Д16Т и В95Т, заимствованных из источника [3] (см. табл. 1.).

Для наглядности, на рис.1,2 представлены графическая интерпретация линейной зависимости (4) совместно со степенной зависимостью (2) и зависимость

Таблица 1

Материал	E, МПа	$\sigma_т$, МПа	$\varepsilon_т x10^2$	$\sigma_в$, МПа	$\varepsilon_в$ x10^2	K, МПа	n
Д16АТ	72000	274	0,0059	430	0,11	736	0,19
В95АТ	74000	420	0,0074	500	0,07	736	0,13

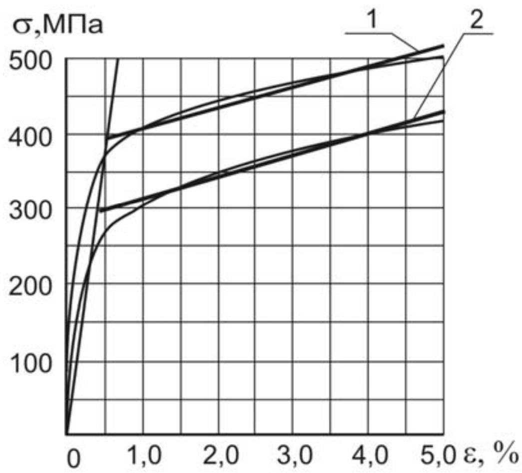

Рис.1. Линейная аппроксимация $\sigma - \varepsilon$ при $\varepsilon_м$ = 5% для: 1 - В95Т; 2 - Д16Т.

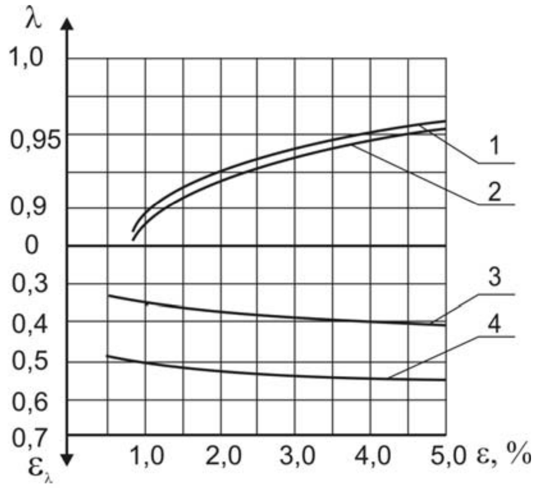

Рис.2. Графики зависимости λ и ε_λ для В95Т (1,4) и Д16Т (2,3) от ε.

параметров $(\lambda, \varepsilon_\lambda)$ от деформации (ε) для сплавов В95Т и Д16Т при максимальной деформации – $\varepsilon_М$ = 5%.

Выводы

1. Точность расчёта, с применением предложенной линейной зависимости $\sigma - \varepsilon$ (4), в задачах упругопластического формообразования деталей практически такая же, как и при применении степенной зависимости.
2. Существенно упрощается задача расчёт технологических параметров формообразования деталей.
3. Для повышения точности расчёта не требуется разбивка диаграммы $\sigma - \varepsilon$ на участки, так как параметры линейной аппроксимации – $\lambda, \varepsilon_\lambda$ получены таким образом, что при заданных максимальных деформациях учитывается весь диапазон деформаций.

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.: ОГИЗ, 1948. - 376 с.
2. Лысов М. И., Закиров И. М. Пластическое формообразование тонкостенных деталей авиатехники. – М.: Машиностроение, 1983г., 174 с.
3. Лысов М.И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. - М.: Машиностроение, 1986. - 236 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.В. Лупкин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.