УДК 621.833.007. О.Г. Приймаков, Г.О. Приймаков.

Оцінка показників надійності силових хвильових зубчастих передач (СХЗП)

Національний техничний університет «ХПІ»
Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба

Оцінимо показники надійності для СХЗП при передачі обертального моменту від двигуна до робочого органу. Аналіз навантаження передач будівельних та дорожніх машин та авіаційної техніки (середнє машинобудування) показує, що амплітуди обертового моменту підкорюються нормальному закону розподілу К. Гаусса. Додатково було встановлено, що коефіцієнт варіації амплітуд навантаження (V_a) суттєво не змінюється від зміни умов та режимів роботи і в середньому $V_a \approx$0,3. В той же час має місце наступна залежність між середнім напруженням на валу τ_m,середньою амплітудою напружень τ_a (МПа), а також передавальною через вал потужністю N (кВт) [1,2]:

$$\frac{\tau_a}{\tau_m}=3{,}3\, N^{-0,55} \qquad (1)$$

Отримана залежність зміни змінних навантажень дозволяє отримати вираз для змінного закону розподілу амплітуд навантажень в залежності від умов та режимів його роботи. При цьому для і-х умов роботи, виходячи із балансу потужності, визначають N_i, після чого згідно (1) знаходять τ_{a1}. Дисперсію амплітуд навантажень визначають, як

$$\sigma_{rai}=\tau_{ai} V_a \qquad (2)$$

Знаючи відносний час роботи (a_1) механічного привода в і-х умовах, щільність імовірності змішаного закону розподілу амплітуд навантажень визначається згідно відомому, [3], виразу:

$$f(\tau_{ac})=\sum_{i=1}^{k} a_i\, f(\tau_{ai}), \qquad (3)$$

де к – кількість відмінних умов використання СХЗП чи механічного привода в цілому.

Для безперервного закону розподілу амплітуд навантажень на основі відомих положень може бути складено наступне функціональне рівняння для ресурсу елемента в годинах:

$$T=\frac{a_p N_o \tau_{rg}^m}{3000\int_{\tau_{acmin}}^{\tau_{acmax}} \tau_{ac}^m f(\tau_{ac})\, d\tau_{ac}}\ , \qquad (4)$$

де a_p – коефіцієнт накопичення втомних руйнувань, N_o – кількість циклів, відповідна межі витривалості, , $N_o \approx N_б$; m – кутовий коефіцієнт кривої витривалості; τ_{rg} – межа витривалості деталі для асиметричного циклу навантаження; μ - середнє число циклів навантаження в секунду.

Вираз (4) можна записати наступним чином:

$$T=E\tau_{rg}^m\ ; \qquad (5)$$

З достатньою точністю можна вважати, що величини E і m – детерміновані, а величина τ_{rg} – випадкова, що підкоряється зрізаному нормальному закону розподілу.

Використовуючи метод статичної лінеаризації, [3], можна записати наступні наближені значення для середнього значення ресурсу елементів СХЗП – (Тр. ср.) та дисперсії ресурсу (Дт):

$$\text{Тр. ср.} \approx f(\overline{\tau_{rg}}) + \frac{1}{2}f''(\overline{\tau_{rg}})\sigma^2_{\tau_{rg}}, \tag{6}$$

$$\text{Дт} \approx [f'(\overline{\tau_{rg}})]^2\sigma^2_{\tau_{rg}} + \frac{1}{4}[f''(\overline{\tau_{rg}})]^2(3\sigma^4_{\tau_{rg}} - \sigma^4_{\tau_{rg}}), \tag{7}$$

З врахуванням (5) отримаємо:

$$\text{Тр.ср.} \approx E\overline{\tau^m_{rg}}\left(1+\frac{m^2-m}{\bar{\tau}^2_{rg}}\right)\sigma_{\tau_{rg}}; \tag{8}$$

$$\text{Дт} \approx \frac{E^2 m^2 r_{rg}^{-2m}\sigma^2_{\tau_{rg}}}{\bar{\tau}^2_{rg}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\sigma\tau_{rg}(m-1)^2}{\overline{\tau_{rg}}^2}\right], \tag{9}$$

де: τ_{rg} – середнє значення межі витривалості;

$\sigma^2_{\tau_{rg}}$ – дисперсія межі витривалості.

В ряді випадків для наближених розрахунків користуються лише першим членом виразу (6). Похибка при цьому може бути від 5 до 35% в бік зменшення кінцевого результату.

Більш точно середній ресурс (в годинах) може бути визначений згідно виразу:

$$\text{Тр.ср.} = E\int_0^\infty \tau^m_{rg} f(\tau_{rg})d\tau_{rg}; \tag{10}$$

де $f(\tau_{rg})$ – щільність імовірності межі витривалості елемента поверхні гнучкого колеса СХЗП.

Для визначення гамма-процентого ресурсу слід попередньо скласти вирази для закону розподілу ресурсів.

Вважаючи, що закон розподілу межі витривалості підкоряється зрізаному нормальному закону, можна скласти наступні вирази для щільності імовірності цього параметра:

$$f(\tau_{rg}) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_{rrg}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\tau_{r\sigma}-\overline{\tau_{rg}})^2}{2\sigma^2_{\tau_{rg}}}} & \tau_{rg} \geq 0 \\ 0 & \tau_{rg} < 0 \end{cases} \tag{11}$$

де: $c = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{rrg}}\right)}$, $\Phi(u)$ – табульований інтеграл ймовірностей.

Відповідно вираз для закону розподілу межі витривалості прийме наступний вигляд:

$$F(\tau_{rg}) = C\int_0^{\tau_{rg}} \frac{1}{\sigma_{\tau_{rg}}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\tau_{rg}-\overline{\tau_{rg})}^2}{2\sigma_{\tau_{rg}}^2}} d\tau_{rg} \qquad (12)$$

Враховуючи (12), а також (5), визначимо закон розподілу ресурсів.

У відповідності з поняттям функції розподілу можна записати:

$$F(T_p) = P(T_p \le t)=$$

$$P(E\tau_{rg}^m \le t)=P[\tau_{rg} \le (\tfrac{t}{E})^{\frac{1}{m}}]=F\tau_{rg}[(\tfrac{t}{E})^{\frac{1}{m}}]=C\int_0^{(\frac{t}{E})^{\frac{1}{m}}} \frac{1}{\sigma_{\tau_{rg}}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left[(\frac{t}{E})^{\frac{1}{m}}-\overline{\tau_{rg}]}\right]^2}{2\sigma_{\tau_{rg}}^2}} dt, \qquad (13)$$

Проводячи заміну змінних:

$\left|u = \frac{(\frac{t}{E})^{\frac{1}{m}}-\overline{\tau_{rg}]}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right|$, отримаємо:

$$F(T_p) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{\tau_{rg}}}}^{\frac{(\frac{t}{E})^{\frac{1}{m}}-\overline{\tau_{rg}]}}{\sigma_{\tau_{rg}}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = C\left\{\Phi\left[\frac{(\frac{i}{E})^{\frac{1}{m}}-\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right] - \Phi\left[\left(-\frac{\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right)\right]\right\}, \qquad (14)$$

Враховуючи, що:

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\overline{\tau_{rg}}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right)=1-\frac{1}{C}, \qquad (15)$$

В підсумку отримаємо:

$$F(T_p) = (1-c) + c\Phi\left[\frac{(\frac{t}{E})^{\frac{1}{m}}-\overline{\tau_{rg}]}}{\sigma_{\tau_{rg}}}\right], \qquad (16)$$

Вираз для імовірності безвідмовної роботи матиме наступний вигляд:

$$Q(T_p) = 1 - F(T_p), \qquad (17)$$

Величина γ-процентного ресурсу T_γ може бути отримана із умови:

$$Q(T_{p\gamma})=\frac{\gamma}{100}, \qquad (18)$$

Величина коефіцієнта a_p, що входить в вираз (4) згідно рекомендацій [4], дорівнює:

$$a_p = \frac{\sigma_{amax}\xi-0{,}5\overline{\tau}-1g}{\sigma_{amax}-0{,}5\overline{\tau}-1g}, \qquad (19)$$

Коефіцієнт ξ можна визначити згідно залежності:

$$\xi = \int_{0{,}5\tau-1g}^{\tau_{amax}} \frac{\tau_a}{\tau_{amax}} f(\tau_a) d\tau_{a,} \qquad (20)$$

Як значення τ_{amax} слід вибирати таке значення τ_a, імовірність перевищення якого складає P≤ $10^{-5}\ldots10^{-6}$. При ξ< $0{,}45$ по рівнянню (19) $a_p < 0{,}2$, що в більшості випадків не відповідає експериментальним даним. В цьому випадку доцільно прийняти a_p=0,2. Для визначення N_0 та m можна використати наступні наближені залежності [4,5]:

$$\begin{cases} m_{-1} = 0,\left(\frac{\tau-1g}{\tau_{og}} \pm 0{,}043\right); \\ m_r = \frac{m-1\sqrt[3]{4(1-r)}}{2}; \\ lgc = 4{,}71 + 1{,}61m_r. \end{cases} \quad (21)$$

Згідно останньої формули із (21), якщо відомо m_r, визначають lgc. Потім по рівнянню кривої втоми Велера, знаючи m_r та $\tau_{rg,}$ знаходять lgN_0 і, відповідно N_0. Величина $\overline{\tau_{rg,}}$ повинна відображати параметри змішаного закону розподілу згідно залежності:

$$\overline{\tau_{rg,}} = \tau_{-1g} - \psi_{rg}\tau_m^{ст}, \quad (22)$$

де $\tau_m^{ст} = \sum_{i=1}^{k} a_i\tau_{mi}$.

Характеристика завантаженості гнучкого елемента СХЗП, що входить до виразу (4), може бути позначена:

$$\int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_{ac}^m f(\tau_{ac})d\tau_{ac} = B \quad (23)$$

З врахуванням умов експлуатації СХЗП можна записати:

$$B = a_1\int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_a^m f_1(\tau_a)d\tau_a + a_2\int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_a^m f_2(\tau_a)d\tau_a + \cdots + a_k\int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_a^m f_k(\tau_a)d\tau_a \quad (24)$$

Позначимо

$$\int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_a^m f_i(\tau_a)d\tau_a = b_i$$

Тоді, при нормальному законі розподілу $f_1(\tau_a)$ можна записати:

$$b = (\sigma_{\tau_a}\sqrt{2\pi})^{-1} I_m, \quad (25)$$

де

$$I_m = \int_{\tau_{amin}}^{\tau_{amax}} \tau_a^m e^{\frac{(\tau_a-\overline{\tau_a})^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}}\, \tau_a$$

Виконаємо заміну змінної $y = \tau_a - \overline{\tau_a}$, тоді:

$$I_m = \int_{\alpha}^{\beta} (y + \overline{\tau_a})^m e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} d\tau_a \tag{26}$$

де $\alpha = \tau_{amin} - \tau_a$; $\beta = \tau_{amax} - \tau_a$.

Розкладаючи $(y + \overline{\tau_a})^m$ по формулі бінома Ньютона, отримаємо:

$$(y + \tau_a)^m = \sum_{a=0}^{m} \mathrm{c}_\mathrm{m}^\mathrm{d} \mathrm{y}^\mathrm{d} \mathrm{\tau}_\mathrm{a}^{\mathrm{m-d}} \tag{27}$$

де C_m^d – біноміальний коефіцієнт, $\mathrm{C}_m^d = \frac{m!}{k!(m-d)!}$.

Враховуючи (27), вираз (26) можна переписати наступним чином:

$$I_m = \sum_{a=0}^{m} \mathrm{C}_m^d \tau_a^{m-d} \int_{\alpha}^{\beta} y^d e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} d\tau_a = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_m^d \sigma_a^{m-d} G_d \tag{28}$$

де $G_d = \int_{\alpha}^{\beta} y^d e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} d\tau_a$

При d=0:

$$G_o = \sigma_{\tau_a} \sqrt{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_{\tau_a}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_{\tau_a}}\right) \right]$$

При d=1:

$$G_1 = \sigma_{\tau_a}^2 \left(e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} \right)$$

При d≥2:

$$G_d = \sigma_{\tau_a}^{d+1} 2^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \left[P\left(\frac{d^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, d+1\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, d+1\right) \right]$$

де Г(x) – гамма-функція, Р(u^2, n) – x^2 – квадрат-розділ з n ступенями свободи.

В приватному випадку, при m=4, отримаємо:

$$C_2 = \int_{\sigma}^{\beta} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} dy = \sigma_{\tau_a}^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, 3\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, 3\right) \right]$$

Величина C_4:

$$\mathrm{C}_4 = \int_{\sigma}^{\beta} y^4 e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} dy = 3\sigma_{\tau_a}^5 \left[P\left(\frac{d^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, 5\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2}, 5\right) \right]$$

Відповідно, I_4:

$$I_4 = \tau_a^{-4}\sigma_{\tau_a}\sqrt{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_{\tau_a}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_{\tau_a}}\right)\right] + 4\tau_a^{-3}\sigma_{\tau_a}^2\left(e^{\frac{-\alpha^2}{2}} - e^{\frac{-\beta^2}{2}}\right)$$
$$+ 6\tau_a^{-2}\tau_{\tau_a}^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},3\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},3\right)\right]$$
$$+ 8\overline{\tau_a}\sigma_{\tau_a}^4\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},4\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},4\right)\right]$$
$$+ 3\sigma_{\tau_a}^5\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},5\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},5\right)\right]$$

Величина b_4:

$$b_4 = \tau_a^{-4}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_{\tau_a}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_{\tau_a}}\right)\right] + 4\frac{\overline{\tau_a^3}\sigma_{\tau_a}}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma_{\tau_a}^2}}\right) + 3\tau_a^{-2}\sigma_{\tau_a}^2\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},3\right) -\right.$$
$$\left.P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},3\right)\right] + 8\frac{\overline{\tau_a}\,\sigma_{\tau_a}^3}{\sqrt{2\pi}}\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},4\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},4\right)\right]$$
$$+\frac{3}{2}\sigma_{\tau_a}^4\left[P\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_{\tau_a}^2},5\right) - P\left(\frac{\beta^2}{\sigma_{\tau_a}^2},5\right)\right]$$

Приведені формули відносяться до величини m, що виражається цілим числом. При дробовому m величина b може бути отримана приблизно шляхом інтерполяції. Для m=l+z, де l – ціла частина показника m, а z-дробова частина, можна записати:

$$b_m = (1 - z)b_c + zb_c + 1 \tag{29}$$

Наприклад, при m=3,25:

$$b_{3,25} \approx 0{,}75b_3 + 0{,}25b \tag{30}$$

Підводячи підсумок, слід відзначити, що ця робота, по суті, є методикою оцінки надійності СХЗП як елементу механічного приводу різноманітного призначення в середньому машинобудуванні.

Список літератури

1. Волков Д.П., Николаев С.Н., Марченко И.А. Надежность роторных и траншейных экскаваторов. – М.: Машиностроение, 1972.-583с.
2. Николаев С.Н. Пути повышения эффективности использования экскаваторов на строительстве магистральных трубопроводов.- М.: изд. ВНИЭГазпром, 1972. – 324с.
3. Серенсен С.В. и др. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. – М.: Машиностроение, 1975. – 587с.
4. Гольд Б.В. и др. Прочность и долговечность автомобиля. – М.: Машиностроение, 1974. – 441с.
5. Приймаков О.Г. Надійність і ресурс авіаційної наземної техніки. – Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2006. – Вып. 31. – с. 62-70.