

## Идентификация определяющих параметров модели усталостного разрушения пластины

*АНТК им. О.К. Антонова, Киев*

**Постановка задачи и тенденции развития моделей.** В статье исследуется процесс накопления поврежденности и развития усталостной трещины с использованием новой модели континуальной механики поврежденности. Такого рода модели являются нелинейными по своей природе [1]. Многие из конструктивных элементов планера самолета подвержены вполне определенным по величине повторяющимся нагрузкам [5]. Кроме того, вследствие различных эксплуатационных воздействий в структуре материала могут появляться микротрещины или микропоры, даже если в начальном состоянии это был практически сплошной материал. Эти микротрещины разрастаются по мере увеличения времени эксплуатации изделия и, в конечном счете, могут привести к разрушению, несмотря на то, что нагрузки не превышают критических в статическом смысле. Следовательно, актуальным является учет накопления поврежденности материала, о чем свидетельствует большое число публикаций по этой теме в последние годы [1,2,10,13]. Здесь развивается модель изотропной вязкой континуальной поврежденности и проведена экспериментальная проверка базовых определяющих соотношений и прогнозируемых, на основе применения модели, результатов.

Рассматривается процесс зарождения и роста трещины усталости в нелинейно упругом материале типа АД37, который находится под действием циклической нагрузки. Математическая модель разрушения включает в себя непосредственный расчет процесса зарождения и развития дисперсных дефектов и макроскопической трещины. При этом поврежденность материала учитывается с помощью эквивалентных параметров нелинейной упругости [11,12].

В современных методах расчета на прочность все более используются подходы, основанные на гипотезах механики континуальной поврежденности [1, 5, 10]. В частности, постановка и решение задач диагностики технического состояния элементов планера самолета являются достаточно проблематичными для их реализации в рамках традиционных подходов. Согласно новой научной концепции определения параметров надежности агрегатов планера самолета из современных конструкционных материалов, предложенной в [5], реальный конструкционный материал рассматривается как некая нелинейная многокомпонентная система. Иерархизовано - соподчиненные компоненты этой системы дискретно - непрерывно заполняют пространство и постоянно находятся в циклически изменяющемся напряженно-деформированном состоянии. Фрагментация материала на элементарные слои, армирующие включения и развивающиеся дефекты отображает как процессы релаксации напряжений при внутренних и внешних энергообменных процессах, так и особенности процессов деформирования при различных режимах нагружения. Каждому конкретному виду механических движений отвечает и свой специфический масштабный уровень в блочной иерархии, отображающийся в макроструктуре, мезоструктуре или микроструктуре. Если роль механических движений на макроуровне материала достаточно хорошо исследована, то роль механических движений на мезо и микроуровне находится в стадии изуче-

ния. Зарождение и развитие макро и микротрещин и последующее разрушение являются предметом анализа с точки зрения связанности процессов, происходящих на макро и мезо уровнях. Поведение реальных материалов при разрушающих напряжениях рассматривается с точки зрения нового направления механики деформированных сред – механики континуальной поврежденности. Предполагается, что непосредственно перед разрушением в материале образуется специфическая мезоструктура, состоящая из прочных доменов и областей (полос) текучести. Она формируется в процессе подготовки разрушения как реакции материала на длительную, циклическую нагрузку или изменение теплового режима. Хрупкому разрушению предшествуют интенсивные пластические процессы - фронты деформации, которые распространяются от концов микротрещин и подготавливают материал к разрушению в результате развития магистральной трещины.

Эксперименты по разрушению при циклических воздействиях подтверждают факт зарождения различного типа микроповреждений и дальнейшего развития доминантной трещины, которая и является причиной выхода из строя конструктивного элемента. Если микроповреждения достаточно многочисленны, то их можно рассматривать как равномерно или случайно распределенные по некоторой области  $\Omega$ . Предсказание момента разрушения  $t_*$  является одной из центральных проблем механики деформируемого твердого тела. В образце, занимающем область  $\Omega$  и подверженном циклической нагрузке, на различных внутренних дефектах зарождаются и растут трещины до тех пор, пока одна из трещин, в результате роста, не становится доминантной. Эта доминантная трещина является критической в том смысле, что при достижении ею определенной длины  $l_*$  она становится неустойчивой и распространяется после этого с неограниченной скоростью, практически мгновенно.

В модели Гриффитса предполагается, что коэффициент интенсивности напряжений  $K$  (КИН) на фронте трещины может быть параметром, используемым для сравнения с интенсивностью разрушения, чтобы определить критический момент нагрузки тела с трещиной. Позднее Пэрис и Эрдоган предложили уравнения роста усталостной трещины, связывающее скорость роста трещины с КИН у вершины трещины. Однако существует много случаев, когда разрушение образца не может быть описано уравнением роста только одной трещины. На практике скорее наблюдается одновременный рост многих, достаточно малых трещин, их слияние и, в результате, образование макроскопической или доминантной трещины. В настоящей работе описан метод математического моделирования процесса распространения усталостной трещины в нелинейном или пластическом материале типа АД37 с учетом того, что его эквивалентные упругие характеристики зависят от степени поврежденности.

**Деформация конструкционного материала с повреждением при плоском сдвиге.** Рассматривается процесс распространения трещины усталости в конструкционном материале АД37 в условиях циклической нагрузки. Эквивалентные характеристики материала зависят от меры поврежденности  $D$ . Считаем, что материал является нелинейно упругой неоднородной средой, которая состоит из однородной матрицы, которая содержит статистически однородное множественное число сфероидальных зерен или включений. Упругие свойства матрицы и зерен одни и те же, но собственные начальные деформации [18] могут быть разными. Такие поля деформаций трансформации возникают в результате термического расширения, фазовых переходов, возникновения локальных зон и зон пластичности и др. Таким образом, компоненты, которые входят в репрезентативный объ-

ем  $v_R$ , рассматриваются как гомогенные, их свойства предполагаются известными. При этом экспериментальное определение механических характеристик связано с изменением нагрузок или смещений на противоположных сторонах представительского образца, который в рамках принятой модели рассматриваем как неоднородное тело. Такой подход может быть реализован путем анализа предельной задачи, где неоднородное тело занимает область, объем которой  $v_R$  нормируется к единице.

Как отмечалось в [1,2,17], повреждения, накопленные в материале вблизи вершины трещины, можно описать с помощью скалярной функции времени  $D(t)$ . Считаем, что в процессе нагрузки величина  $D$  принимает значение  $[0,1]$  на отрезке времени  $t$ . При этом  $D = 0$  отвечает случаю, когда повреждения отсутствуют, значение  $D = 1$  отвечает уровню повреждений, при котором материал полностью разрушился в рассмотренной точке. Классическое определяющее уравнение механики континуальной квазихрупкой поврежденности имеет вид [1,17]

$$\sigma_{ij} = (1 - D)\lambda_{ijab}e_{ab} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений Коши,  $e_{ab}$  - тензор линейной деформации

$$e_{ab} = \frac{1}{2}(H_{ab} + H_{ba}), \quad H_{ab} = u_{a,b}(x) \quad (2)$$

где  $u_i(x)$  - вектор перемещений,  $\lambda_{ijab}$  - тензор линейной упругости. Соотношение (1) дает возможность учесть влияние меры поврежденности  $D$  на упругие свойства материала в качестве фактора, который уменьшает его жесткость. Для того чтобы использовать экспериментальные данные и существующие решения задач механики разрушения, рассмотрим фундаментальное одномерное определяющее уравнение [18], которое связывает некоторое номинальное эквивалентное напряжение

$\bar{s}$  и эквивалентную деформацию  $\bar{e}$  при плоском сдвиге.

$$\bar{e} = \frac{1}{3G} \frac{\bar{s}}{(1-D)}, \quad \bar{s} = \left( \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{1/2}, \quad \bar{e} = \left( \frac{2}{3} e'_{ij} e'_{ij} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Здесь  $G = \mu$  - модуль сдвига неповрежденного материала, штрихами помечены девиаторы тензора напряжений и тензора малых деформаций соответственно. Учитывая соотношения (2), можно рассмотреть эквивалентный модуль сдвига  $\bar{G}$ , который описывает поведение континуально поврежденного материала [11]. При этом

$$\bar{e} = \frac{1}{3\bar{G}} \bar{\sigma}, \quad \bar{G}(D) = \mu(1 - D) \quad (4)$$

Тогда, используя в качестве условия эквивалентности упругих свойств модели нелинейной механики случайно неоднородных сред [1,4,14] и механики континуальной поврежденности, устанавливаем взаимно однозначное соответствие между параметром  $\xi$ , который выражает количество микротрещин в единице объема и скалярной мерой поврежденности Качанова-Работнова  $D$

$$(1 + a_\mu \xi)^{-1} = 1 - D \quad (5)$$

Отсюда находим

$$\xi = \frac{1}{a_\mu} \frac{D}{1 - D} \quad (6)$$

Следовательно, зависимости эквивалентного модуля Юнга  $\bar{E}$  и модуля объемного сжатия  $\bar{K}$  от меры поврежденности  $D$ , который может быть определен

из эксперимента [17], будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E \left[ 1 + \kappa_E \frac{D}{1+D} \right]^{-1}; & \kappa_E &= \frac{(1+\nu)(10-3\nu)}{2(5-\nu)}; \\ \bar{K} &= K \left[ 1 + \kappa \frac{D}{1+D} \right]^{-1}; & \kappa &= \frac{5(1+\nu)(2-\nu)}{2(1-2\nu)(5-\nu)}; \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимости эквивалентных модулей Юнга и объемного сжатия от меры поврежденности  $D$  в случае плоского сдвига проиллюстрированы на рис.1.

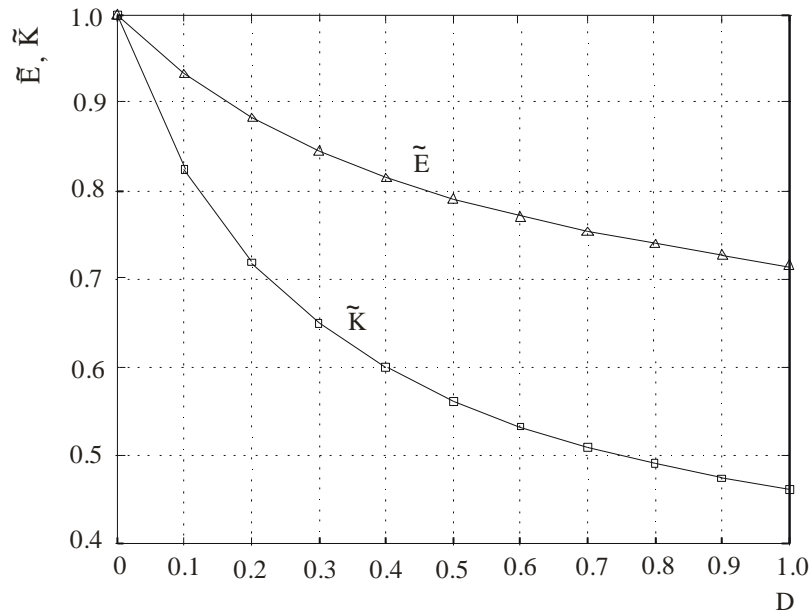


Рис. 1: Развитие поврежденности в материале

Формулы (7), вместе с (4) дают возможность исследования в трехмерной постановке на базе классических уравнений механики сплошной среды влияния вязкой поврежденности на процесс распространения трещины усталости.

**Численное моделирование усталостной долговечности.** Здесь предложена новая простая модель, основанная на механике поврежденности. Она в основном базируется на модели усталостной поврежденности, использующей  $S - N$  кривые и пренебрегает анализом деталей локального разрушения. Используются данные семейства  $S - N$  кривых и специально введенную меру поврежденности  $D$  для учета эффектов усталости в каждом из монослоев пакета. Максимальное циклическое напряжение связано с усталостной долговечностью при различных отношениях напряжений. Общая формула

$$\begin{aligned} S_{\max} &= A_R \times \log(N) + B_R \\ R &= S_{\max} / S_{\min} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $S_{\max}$  и  $S_{\min}$  - максимум и минимум циклических напряжений,  $R$  - отношение напряжений,  $N$  - усталостная долговечность, параметры  $A_R$  и  $B_R$  представляют собой коэффициенты прочности, соответствующие данному отношению напряжений цикла.

Такое представление хорошо описывает результаты одномерных экспериментов при постоянной нагрузке. Концепция поврежденности необходима для описания процессов, проявляющихся при многоосном нагружении. В механике по-

врежденности эволюция параметра поврежденности  $D$  выражается через меру деградации свойств материала. Поврежденность монотонно увеличивается в продолжение процесса нагружения. Когда параметр поврежденности  $D$  достигает значения единицы, это соответствует полному разрушению материала. В случае циклического усталостного нагружения поврежденность обычно выражается как отношение числа циклов нагружения к их предельному значению при заданной нагрузке. Наиболее часто используется правило линейного суммирования повреждений Майнера

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K n_i / N_{fi} = 1 \quad (9)$$

Здесь  $K$  - число стадий нагружения,  $D_i$  - поврежденность, вызванная на каждой стадии нагружения,  $n_i$  - число циклов нагружения в соответствующей стадии, и  $N_{fi}$  - предел усталости для данного уровня нагружения.

В случае многослойного многонаправленного пакета каждый слой находится вообще в условиях многоосного напряженного состояния и необходимо ввести новый параметр поврежденности, основанный на статическом критерии прочности Тсаи-Хилла. Тогда только экспериментальные результаты для однонаправленного слоя будут необходимыми для формулировки критерия усталостной долговечности для произвольной последовательности укладки слоев в пакете. Критерий Тсаи-Хилла имеет вид

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} + \frac{\sigma_6^2}{F_6^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{F_1 F_2} = 1 \quad (10)$$

где  $\sigma_{1,2}$  - напряжения вдоль и поперек волокон соответственно,  $\sigma_6$  - напряжения сдвига, параметры  $F_{1,2,6}$  - представляют собой значения статической прочности в разных направлениях.

Таким образом, поврежденность в каждом из слоев при циклическом нагружении по предположению определяется формулой

$$D_i = n_i \left[ (N_1^{fi})^{-2} + (N_2^{fi})^{-2} + (N_6^{fi})^{-2} + (N_1^{fi} N_2^{fi})^{-2} \right]^{1/2} \quad (11)$$

где  $N_k^{fi}$  - усталостная долговечность однонаправленного монослоя при действии чистого растяжения или чистого сдвига соответственно, знак члена, содержащего произведение нормальных напряжений выбран положительным, поскольку предполагается процесс монотонного накопления поврежденности. Как следует из уравнения (11) эксперименты на усталость необходимо провести вдоль направления армирования, в трансверсальном направлении и на сдвиг. Используя представление (11), правило Майнера запишем в форме

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K n_i \left[ (N_1^{fi})^{-2} + (N_2^{fi})^{-2} + (N_6^{fi})^{-2} + (N_1^{fi} N_2^{fi})^{-2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

Таким образом, формула (12) определяет значение поврежденности анизотропного однонаправленного слоя при многоосном нагружении. Разрушение предполагается при значении поврежденности  $D$  равно единице

Этот подход может быть распространен на случай, когда слоистый пакет состоит из многонаправленных монослоев, следующей последовательностью операций. Полную историю нагружения разделим на определенные блоки. В каждом блоке выделим как значимое событие разрушение каждого из монослоев. Если разрушение происходит, считаем, что прочность и жесткость монослоя становятся равными нулю. Тогда пересчитав упругость и прочность пакета в целом, переходим к анализу эволюции поврежденности в фактически новом блоке нагруже-

ния. Вычисления продолжаются до полного разрушения многослойного пакета. Число циклов нагружения до полного разрушения, таким образом, может считаться усталостной долговечностью слоистого композитного пакета.

**Уравнение роста трещины усталости в нелинейно упругом материале.**

Трещина усталости – узкая щель достаточно сложной конфигурации и структуры. В самых простых случаях считаем, что радиус  $\rho$  на конце трещины представляет собой константу материала. В действительности, в зависимости от условий развития, трещина может, как заостряться, так и затупляться. Рассмотрим трещину отрыва длиной  $2l$  в неограниченном теле из изотропного нелинейного материала, который находится под действием одноосного растяжения напряжениями  $s(t)$ , что циклически зависит от времени  $t$ . Трещину усталости рассматриваем как узкую щель с радиусом кривизны на фронте  $\rho$ , считая этот радиус структурной переменной материала. На продолжении фронта трещины образуется конечная зона длиной  $\lambda(l)$ , где сосредоточены все неупругие эффекты. Эти предположения отвечают обычным представлениям об упруго пластичном материале, исследуемом в постановке линейной теории разрушения. Используем методологию энергетического подхода Гриффитса. Размеру трещины задается малый прирост  $\delta l$  по обобщенной координате  $l$ , которая представляет собой половину длины доминантной трещины, и обсчитывается величина вариации  $\delta H$  энергии, которая высвобождается

$$\delta H = (G - R) \delta l, \quad (13)$$

где  $R$  – обобщена сила сопротивления,  $G$  - обобщена сила, которая развивает трещину и в случае трещины типа Гриффитса имеет вид

$$G = \frac{\pi s^2 l}{\tilde{E}}. \quad (14)$$

Здесь, в отличие от моделей классической линейной механики разрушения,  $\tilde{E} = \tilde{E}(D)$  - эквивалентный модуль упругости поврежденного материала. Условие роста трещины запишем в виде

$$G[l(n), s_{\max}(n)] = R[D(n)]. \quad (15)$$

В квазиустановившемся приближении в соответствии с определенными временами пребывания точки на фронте трещины имеем

$$D(n) \approx D_R(n) + \lambda \left( \frac{dl}{dn} \right)^{-1} f \{ \sigma [l(n) + \lambda_0, n] \}. \quad (16)$$

Здесь  $D_R(n)$  - мера микроповреждений в отдаленном поле, точнее при  $x = l(n) + \lambda_0$  размер  $\lambda_0$  берется из отрезка  $[0, \lambda]$ .

Подстановка (16) в (15) приводит к дифференциальному уравнению относительно размера трещины  $l(n)$ . Чтобы получить уравнение, за формой аналогичное известным полуэмпирическим уравнениям трещин усталости, принимается, что  $\rho = \lambda$ . Рассматривается степенная модель накопления повреждений, вместе с тем вводится размах коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K = \Delta s (\pi l)^{1/2}$  а также пороговые характеристики материала  $K_B = \sigma_B (\pi \rho)^{1/2}$ . Тогда

уравнение кинетики накопления повреждений усталости принимает вид

$$\frac{\partial D}{\partial n} = \left( \frac{\Delta K}{K_B} \right)^m \text{ при } l \leq |x| \leq l + \lambda. \quad (17)$$

Инкубационная стадия заканчивается при выполнении равенства

$$n_* = \left( \frac{K_B}{\Delta K} \right)^m \left( 1 - \frac{K^2}{K_c^2} \right)^{1/\alpha}. \quad (18)$$

Подставив выражения (17) и (18) в условие равновесия (15), получим уравнение относительно  $l(n)$ :

$$\frac{dl}{dn} = \lambda \left( \frac{\Delta K}{K_B} \right)^m \left[ \left( 1 - \frac{K^2}{K_c^2} \right)^{1/\alpha} - D_R \right]^{-1}. \quad (19)$$

**Экспериментальное исследование скорости роста трещины усталости в алюминиевом сплаве АД37.** Целью испытаний являлось исследование характеристик скорости роста усталостных трещин в образцах из листов сплава АД37(1370), изготовленных по различным технологическим вариантам. Испытывались тонкие плоские образцы размером 1,1x200x600 мм, изготовленные из листов сплава АД37(1370), подвергнутые различным видам закалки и механической обработки поверхности.

Перед проведением испытаний в геометрическом центре образца механическим способом наносился сквозной продольный надрез длиной 5 мм и шириной не более 0,1 мм. Вершины надреза заострялись лезвием. Для облегчения измерения длины усталостной трещины на поверхности образца путем процарапывания наносилась делительная сетка с шагом 1 мм. Испытания образцов производились в универсальной испытательной машине УИМ-25. В машине образцы крепились гидрозахватами. Перед проведением испытаний были измерены фактические толщины образцов в местах предполагаемой наклейки тензорезисторов.

С целью оценки напряженного состояния образцов при установке в захватах производилось контрольное тензометрирование, для чего на поверхности образца наклеивались малобазные тензорезисторы. В процессе установки образца в захватах испытательной машины добивались равномерного распределения напряжений по поперечному сечению образца. После установки образца в испытательной машине производилось нагружение образца циклической нагрузкой с приложением маркерного блока. Режим нагружения основного блока -  $R = 0,1$ ,  $P_{\max} = 2860$  кг,  $f = 2$  Гц,  $\sigma_{\max} = 13$  кг/мм<sup>2</sup>. При этом фиксировался момент страгивания трещины ( $2l_0 + 1$  мм) и ее дальнейшее развитие до окончательной длины  $2l = 65$  мм. В процессе испытаний на скорость роста трещин фиксировалось длина правой и левой половины трещины и соответствующее количество циклических нагружений. Зависимость длины трещины  $L$  от количества циклов нагружения представлены на рис.2. Расчет параметров циклической трещиностойкости в терминах скорости роста трещины  $dl/dN$  и размаха коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  производился согласно РД 50-345-82 "Методические указания. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при циклическом нагружении)".

Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения представлены на рис.2

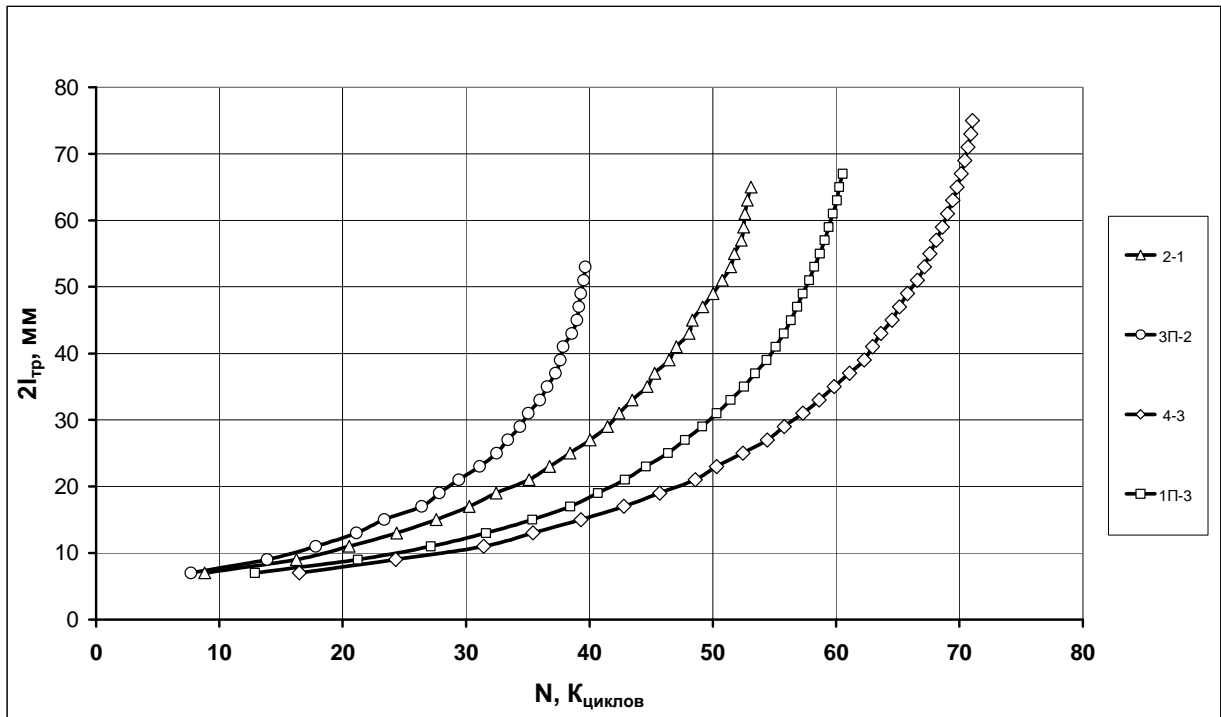
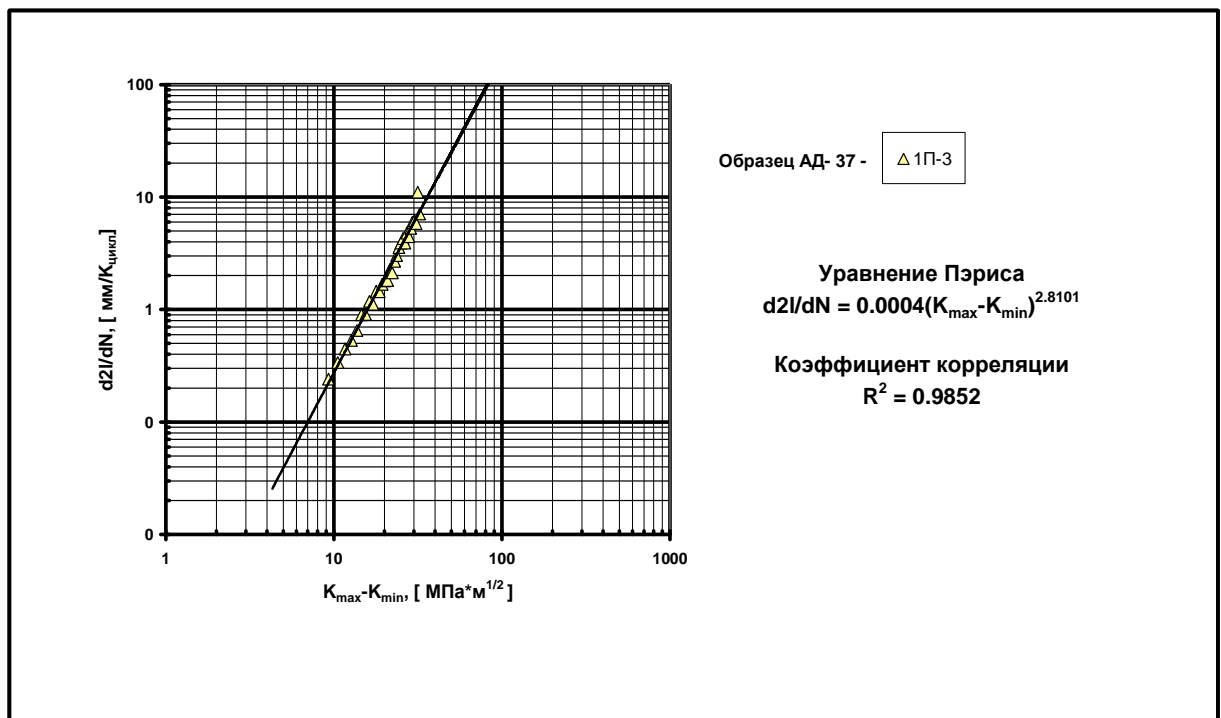
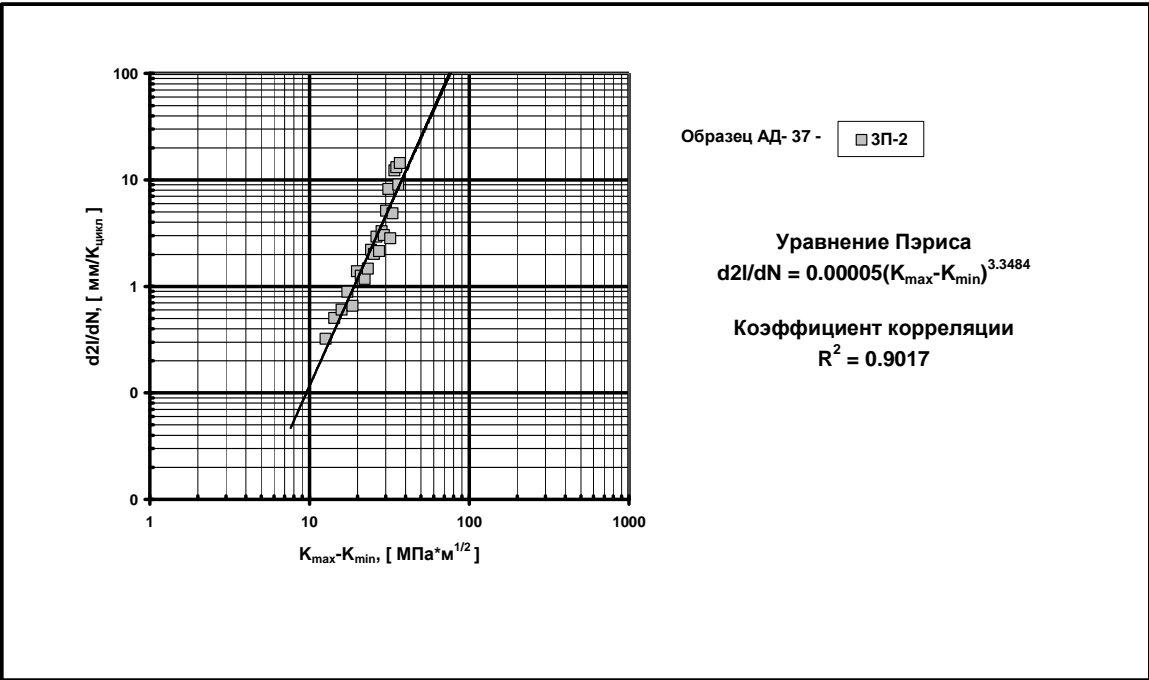
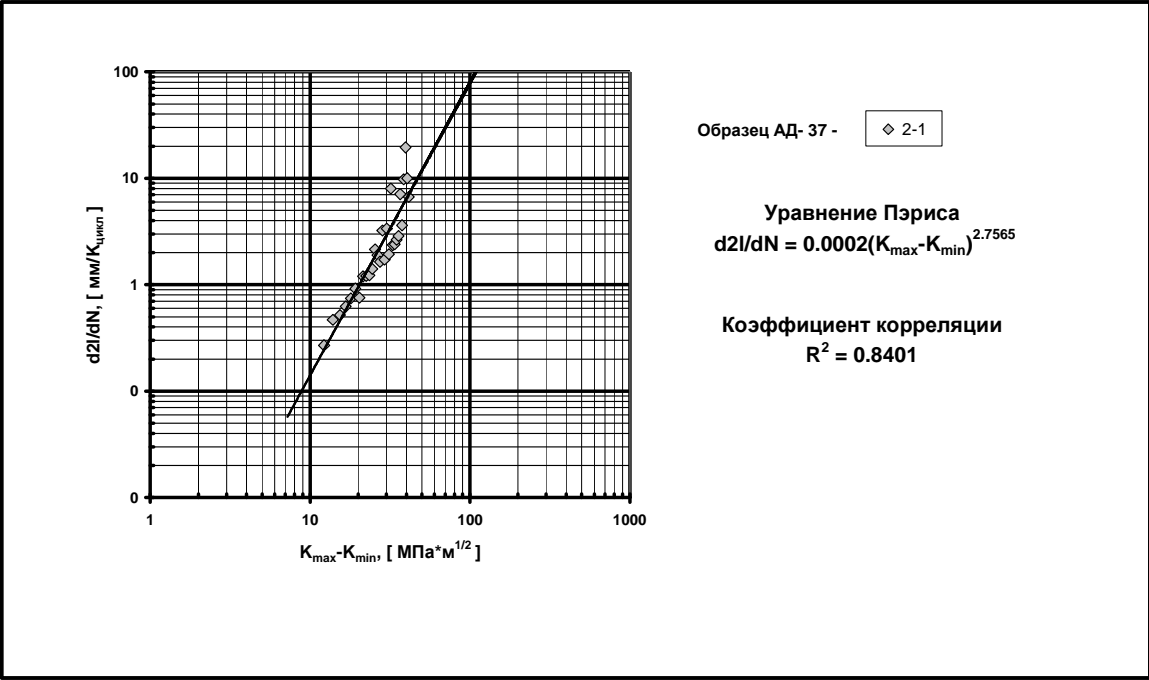


Рис.2. Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения.

Диаграммы усталостного разрушения в координатах  $dI/dN$  —  $\Delta K$  представлены на рис. 3.







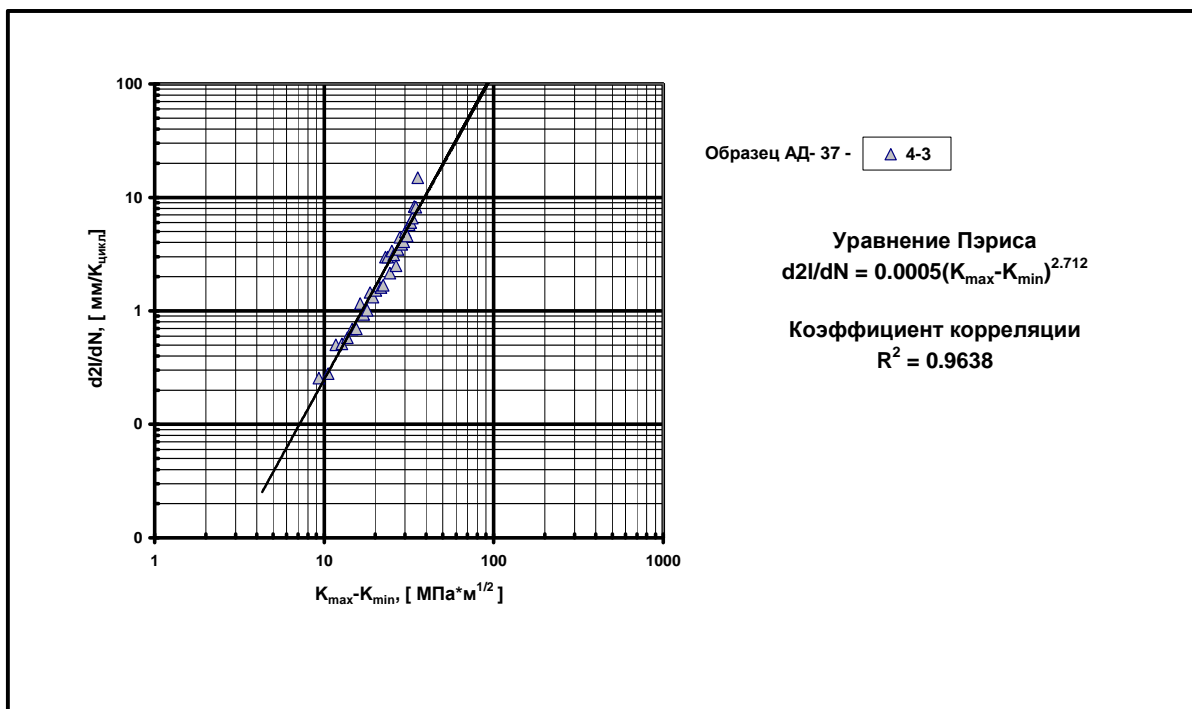


Рис. 3: Диаграммы усталостного разрушения.

### Выводы

Рассмотрены тенденции развития математических моделей усталостного разрушения пластины с применением соотношений континуальной механики поврежденности. При этом реальный конструкционный материал рассматривается как некая нелинейная многокомпонентная система, упругие характеристики которой зависят от степени поврежденности.

Установлено однозначное соответствие между скалярным параметром меры поврежденности, который определяется из эксперимента на одномерное растяжение, и аналитическим дисперсным параметром, который характеризует число дискообразных микротрещин в единице объема.

Используя методологию энергетического подхода Гриффитса, получено уравнение роста трещины усталости в нелинейно упругом материале, в котором, в отличие от моделей классической линейной механики разрушения, вводится эквивалентный модуль упругости поврежденного материала.

Проведено экспериментальное исследование скорости роста трещины усталости в образцах из листового алюминиевого сплаве АД37, изготовленных по различным технологическим вариантам. Испытывались тонкие плоские образцы размером 1,1x200x600 мм, подвергнутые различным видам закалки и механической обработки поверхности. Перед проведением испытаний в геометрическом центре образца механическим способом наносился сквозной продольный надрез длиной 5 мм и шириной не более 0,1 мм. Режим нагружения основного блока -  $R = 0,1$ ,  $P_{\max} = 2860\text{кг}$ ,  $f = 2\text{Гц}$ ,  $\sigma_{\max} = 13\text{ кг/мм}^2$ .

### Список литературы

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990.- 448с.
2. Голуб В.П., Плащинская А.В. Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении // Прикл. механика, 1994. – textbf 30 №7. – с.53-63.

3. Гусев А.С. Соппротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. - 246с.
4. Гусев Б.В., Кондращенко В.И., Маслов Б.П., Файвусович Ф.С. Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. – М.: Научный Мир, 2006.- 560с.
5. Кива Д.С., Маслов Б.П., Климюк А.Н. Концептуальный подход к определению параметров надежности агрегатов планера самолета из КМ // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии, - Х.: НАКУ „ХАИ” - 2006. - Вып. 32. - с.5 - 16.
6. Маслов Б.П., Климюк А.Н. Статистическая модель полимерного композиционного материала агрегатов планера самолета в местах установки механического крепежа // Труды 4-ой Московской Международной конференции "Теория и практика технологий производства изделий из композиционных материалов и новых металлических сплавов (ТПКММ)", Москва, РФ, 26-29 апреля 2005. - М.:Знание, 2006. - с.541-545.
7. Маслов Б.П. Климюк А.Н., Клопота А.В. Конструкционная прочность и надежность болтовых соединений элементов планера самолета из КМ // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии, - Х.:НАКУ "ХАИ". - 2004. - Вып.23. - с.48 - 58.
8. Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г. Концентрація напружень в ізотропних в'язкопружних композитах з мікротріщинами. - Вісник Дон. ун-ту, №2, (2002), - с.50-53.
9. Маслов Б.П. Концентрация напряжений возле включений в упруго-вязком материале при двумерном статическом нагружении. - Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки, №1, (2006), - с.102-105.
10. Маслов Б.П., Бугай С.Н. Нелинейное деформирование и прочность стохастических композитов с поврежденной матрицей // Механика композитных материалов, №5 - 1995. - с.796 - 803.
11. Маслов Б.П., Шатило Л.В. Рівняння зростання тріщини втоми у пошкодженому матеріалі із зміцненням. // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз. -мат. науки, №1, (2005). – с.114-124.
12. Маслов Б.П., Шатило Л.В. Розподіл напружень біля кінця тріщини у матеріалі з мікропошкодженнями // Вісник львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика, №11, (2005). - с.122-127.
13. Маслов Б.П., Чаусов И.Г. Ползучесть и остаточный ресурс композитных материалов с микроповреждениями матрицы // Вестник Нац. техн. унив. Укр. "КПИ", №44, (2003). - с.20-24.
14. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. - К.: Наук. думка, 1993. - 132 с.
15. Maslov B.P. Stress concentration in non-compressible multi-component material. Int. Appl. Mech., 36, N3, (2000), 108-114.
16. Maslov B.P. Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites. Journal of Engineering Mathematics, Springer, 58, (2008), 34-59.
17. Peerlings R.H.J., Brekelmans W.A.M., R. de Borst, Geers M.G.D. Gradient-enhanced damage modeling of high-cycle fatigue Int. J. Numer. Engng.,49, (2000), P.1547-1569.
18. Talbot D.R.S., Willis J.R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite Proc. R. Soc. A460, (2004), p.2705-2723.