УДК 621.327

В.В. Баранник, С.В. Карпенко

Сжатие данных на основе сокращения трехмерной структурной избыточности

Харьковский университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба,
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

1. Введение

Качественное совершенствование информационных систем заключается во внедрении и расширении услуг предоставляемых на основе видеоинформационного взаимодействия. В данном случае возникает потребность в разработке подходов для сокращения объемов видеоданных [1 – 5]. Анализ процессов исключения избыточности на разных уровнях обработки видеоданных выявил, следующие недостатки: наибольшие степени сжатия достигаются за счет учета психовизуальных характеристик зрительной системы; учитываются в основном две закономерности; сжатие видеоданных на разных уровнях содержит в себе внутрикадровую обработку [1; 2]. Это приводит к недостаточному уровню компактного представления изображений с сохранением заданного качества восприятия. Отсюда вытекает, что ***актуальным направлением*** научных исследований является разработка трехмерного кодирования видеоданных.

2. Формулировка проблемы исследований

Рассмотрим трехмерные структуры $A_\nu = \{a_{j i z}\}$ параллелепипедной формы $1 \le j \le n_{стб}$, $1 \le i \le n_{стр}$, $1 \le z \le n_c$, составленные из элементов $a_{j i z}$, удовлетворяющих ограничениям [4; 5]:

$$a_{j i z} \le L-1, \;\; 1 \le j \le n_{стб}, \; 1 \le i \le n_{стр}, \; 1 \le z \le n_c, \tag{1}$$

Ограничения, заданные неравенствами (1), указывают на то, что динамический диапазон по трем направлениям ТСД является равномерным и равным L.

Количество $V(L)^{(3)}$ трехмерных структур $A_\nu = \{a_{j i z}\}$ с равномерным динамическим диапазоном по трем направлениям, отличающихся друг от друга составом и расположением элементов равно количеству перестановок с повторениями из $n_{стб}\, n_{стр}\, n_c$ элементов, значения которых изменяется от 0 до $L-1$:

$$V(L)^{(3)} = \prod_{j=1}^{n_{стб}} \prod_{i=1}^{n_{стр}} \prod_{z=1}^{n_c} L = L^{n_{стб}\, n_{стр}\, n_c}. \tag{2}$$

Величина $V^{(3)}$ является количеством перестановок с повторениями из $n_{стб}\, n_{стр}\, n_c$ элементов, значения которых удовлетворяют ограничениям, заданных неравенствами:

$$a_{j i z} \le \psi_{j i z} - 1, \tag{3}$$

где $\psi_{i j z}$ - величина, равная минимуму из трех максимумов по строке и по столбцу внутри горизонтального сечения ТСД и по вертикали.

Отличие между первыми и вторыми трехмерными структурами состоят в том, что во втором случае ограничения по разным направлениям ТСД неоднородные. При этом, поскольку выполняется неравенство

$$\psi_{ijz} \le L\,,\ 1 \le j \le n_{стб}\,,\ 1 \le i \le n_{стр}\,,\ 1 \le z \le n_c\,, \tag{4}$$

то количество ТСД с ограниченным неравномерным динамическим диапазоном по трем направлениям будет меньше, чем количество трехмерных структур с равномерным динамическим диапазоном

$$V^{(3)} < V(L)^{(3)}. \tag{5}$$

Это приводит к тому, что информативность $H_v^{(3)}$ ТСД в условиях ограничений на динамический диапазон будет меньше по сравнению с информативностью $H(L)^{(3)}$ для ТСД в условиях отсутствия ограничений. Значит между величинами $H(L)^{(3)}$ и $H_v^{(3)}$ выполняется неравенство

$$R_{min} = H(L)^{(3)} - H_v^{(3)} = \sum_{j=1}^{n_{стб}} \sum_{i=1}^{n_{стр}} \sum_{z=1}^{n_c} (\ell og_2 L - \ell og_2 \psi_{jiz}) > 0\,. \text{(бит)} \tag{6}$$

Разность в двоичных разрядах, определяемая по соотношению (6), равна количеству R_{min} минимальной потенциальной сокращаемой избыточности в результате учета неравномерных ограничений на динамический диапазон элементов ТСД одновременно по трем направлениям. Величина R_{min} зависит от количества перестановок с повторениями с дополнительными ограничениями на диапазон. Поэтому такой вид избыточности относится к классу комбинаторной избыточности. Отсюда следует, что для повышения степени компактного представления без внесения погрешностей разрабатываемый метод должен: обеспечивать сокращение комбинаторной избыточности, обусловленной наличием ограничений на динамический диапазон элементов видеоданных; организовывать обработку одновременно по трем координатам; не допускать потерь информации, вызванных переполнением машинного слова; затрачивать количество операций на обработку, не превышающее порядка $O(n^2)$.

Рассмотрим первое условие. Комбинаторная избыточность, обусловленная ограничениями на динамический диапазон, сокращается в результате полиадического кодирования. Обрабатываемая последовательность представляется в виде полиадического числа.

Под полиадическим числом (ПЧ) понимается число, основаниями элементов которого могут быть произвольные целые числа [3 – 5]. Если основание ψ_i элемента a_i ПЧ формируется на основе ограничений на динамический диапазон по одному направлению (одномерная система оснований $\Psi^{(1)} = \{\psi_1, ..., \psi_i, ..., \psi_m\}$):

$$\psi_i = \lambda_i\,,\ \lambda_i \ge a_i + 1\,, \text{ для } i = \overline{1,m}\,, \tag{7}$$

то полиадическое число $A^{(1)} = \{a_1, ..., a_i, ..., a_m\}$ является одномерным (m - количество элементов полиадического числа; λ_i - значение i-го ограничения на динамический диапазон). Когда основание ψ_{ij} элемента a_{ij} ПЧ строится с учетом ограничений на динамический диапазон по двум направлениям (двумерная система оснований $\Psi^{(2)} = \{\psi_{ij}\}$, $1 \le j \le n_{стб}$, $1 \le i \le n_{стр}$):

$$\psi_{ij} = \min(\lambda_i; \chi_j)\,; \tag{8}$$

$$\chi_j = \max_{1\le i \le n_{стр}} \{a_{ji}\} + 1; \quad 1 \le j \le n_{стб}; \qquad \lambda_i = \max_{1\le j \le n_{стб}} \{a_{ji}\} + 1, \quad 1 \le i \le n_{стр},$$

то полиадическое число считается двумерным $A^{(2)} = \{a_{ij}\}$, $1 \le j \le n_{стб}$, $1 \le i \le n_{стр}$.

Важные особенности трехмерной полиадической системы, заключается в том, что: система оснований формируется на базе ограничений на динамический диапазон. Значит существует возможность учитывать неоднородности в динамических диапазонах трехмерной структуры одновременно по трем координатам; компактное представление полиадических чисел достигается на основе формирования кода-номера $N^{(3)}$, для которого выполняется условие $N^{(3)} < V^{(3)}$.

Следовательно, количество разрядов $\ell og_2 N^{(3)}$, отводимое на компактное представление ТПЧ, не будет превышать величину информативности $H_V^{(3)}$ для построенной системы оснований $\Psi^{(3)} = \{\psi_{jiz}\}$; $1 \le j \le n_{стб}$, $1 \le i \le n_{стр}$, $1 \le z \le n_c$. Тогда выполняется условие $R_{min} < H(L)^{(3)} - \ell og_2 N^{(3)}$, (бит), т.е. за счет полиадического кодирование происходит сокращение комбинаторной избыточности, количество которой превышает минимально потенциальный уровень R_{min}.

Однако, проблема состоит в том, что существуют аналитические выражения формирующие код-номер только для одномерных и двумерных полиадических чисел. Таким образом, ***цель стать*** заключается в том, что требуется разработать трехмерное полиадическое кодирование

$$\begin{cases} N^{(3)} = f\,(A^{(3)}; \Psi^{(3)}); \\ \quad N^{(3)} < V^{(3)}; \end{cases} \tag{9}$$
$$f(\bullet) = ?,$$

где $f(\bullet)$ - функционал, задающий систему выражений для вычисления кода-номера ТПЧ.

3. Разработка метода трехмерного кодирования данных

В общем случае код-номер полиадического числа представляет собой сумму произведений значений элементов ПЧ на соответствующий весовой коэффициент. Для трехмерного случая имеем

$$N^{(3)} = \sum_{j=1}^{n_{стб}} \sum_{i=1}^{n_{стр}} \sum_{z=1}^{n_c} a_{jiz}\,\omega_{jiz}, \tag{10}$$

где ω_{jiz} - весовой коэффициент (jiz)-го элемента.

Весовой коэффициент элемента полиадического числа равен количеству перестановок с повторениями, составленных из младших элементов. Значение весового коэффициента зависит от направления обхода элементов полиадического числа и от их количества. Поскольку величина произведения имеет положительное значение $a_{jiz}\,\omega_{jiz} \ge 0$, то с увеличением количества элементов значение кода-номера $N^{(3)}$ также будет повышаться $N^{(3)} \sim m$. Значит исключить потери информации из-за переполнения разрядной сетки, отводимой на представление величины $N^{(3)}$, можно если:

- для фиксированного количества элементов ПЧ (равномерная длина полиадического числа) использовать переменную длину разрядной сетки на представление кода-номера, т.е.

$$m = \mathrm{const}\,; \qquad S(N^{(3)}) = \mathrm{var}\,, \tag{11}$$

где $S(N^{(3)})$ - количество разрядов, затрачиваемое на представление кода $N^{(3)}$;

- в случае равномерной (постоянной) длины разрядной сетки формировать код-номер для переменного количества элементов ПЧ (переменная длина полиадического числа):

$$m = \mathrm{var}\,; \qquad S(N^{(3)}) = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

В случае вычисления кода-номера в условиях (11) количество элементов полиадического числа известно заранее. Поэтому в качестве направления обхода элементов ПЧ предлагается выбирать направление «от старших к младшим» разрядам. Данное направление обхода реализуется также в условиях (12).

Понятно, что общими условиями полиадического кодирования являются условия (12). Условия (11) получаются из условий (12) путем наложения ограничений на длину m ПЧ. Вывод выражения для определения весового коэффициента будем проводить с учетом выполнения условий, заданных соотношением (12). Это обеспечит сокращение комбинаторной избыточности и исключение потери информации.

Поскольку формирование трехмерных структур рассматривается относительно обработки изображений, то в качестве направления обхода элементов предлагается использовать следующую последовательность: «по вертикалям сверху – вниз, по столбцам в глубину параллелепипеда и по строкам слева – направо». Такая схема характерна для обработки последовательности кадров изображений. Выражение (12) диктует условия, когда:

1) заранее количество элементов полиадического числа считается не известным $m = \mathrm{var}$. Поэтому формирование кода-номера, а, следовательно, и вычисление весового коэффициента предлагается осуществлять по рекуррентной схеме;

2) количество разрядов на представление кода-номера ТПЧ является постоянным (заранее заданным), т.е. $S(N^{(3)}) = M = \mathrm{const}$, где M - длина машинного слова. Отсюда следует, что перед каждым добавлением к текущему значению кода-номера величины $a_{jiz}\,\omega_{jiz}$ необходимо проверять условие

$$N^{(3)}_{jiz} \le 2^M - 1\,, \tag{13}$$

где $N^{(3)}_{jiz}$ - значение кода-номера на (jiz)-м шаге обработки; 2^M - максимальное значение, которое представляется M двоичными разрядами.

Однако, условие (13) использовать для проверки на переполнение машинного слова использовать нельзя. Это объясняется тем, что величина $N^{(3)}_{jiz}$ формируется с учетом текущего значения (jiz)-го элемента ТПЧ. В тоже время при восстановлении ТПЧ на приемной стороне на (jiz)-м шаге обработки значение элемента a_{jiz} не известно. Отсюда проверку на переполнение машинного слова необходимо проводить на основе информации известной на приемной стороне. В качестве такой служебной информации предлагается использовать основания элементов трехмерного полиадического числа. Действительно по определению весового коэффициента полиадического числа величина $\psi_{jiz}\omega_{jiz}$ равна количеству комбинаций, составленных из элементов ТПЧ уже обработанных на (jiz)-м шаге. Следовательно, выполняется условие $N_{jiz}^{(3)} < \psi_{jiz}\omega_{jiz}$. Тогда для проверки на переполнение машинного слова предлагается использовать величину $\psi_{jiz}\omega_{jiz}$, а правило проверки примет вид

$$\psi_{jiz}\omega_{jiz} \le 2^M - 1. \tag{14}$$

Первым элементом a_{111} трехмерной структуры будет старший элемент трехмерного полиадического числа. Если количество разрядов на представление динамического диапазона первого элемента превышает длину машинного слова, то возможны два варианта: предварительно снизить динамический диапазон обрабатываемых данных, например, в результате дифференциальной импульсно-кодовой модуляции; увеличить длину машинного слова.

Разработка рекуррентной схемы формирования кода-номера. ***Вертикальное*** направление обработки ТСД. Если для основания первого элемента ТПЧ выполняется неравенство $\psi_{111} \le 2^M - 1$, то $N_{11}^{(1)} = a_{111}$. По аналогии для первого элемента $(j;i)$-й вертикали ТПЧ получим $N_{ji}^{(1)} = a_{ji1}$. На z-м шаге обработки $(j;i)$-й вертикали проверяется условие (условие на переполнение машинного слова)

$$V_{ji}^{(z)} = \prod_{\gamma=1}^{z} \psi_{ji\gamma} \le 2^M - 1, \tag{15}$$

где $V_{ji}^{(z)}$ - количество допустимых комбинаций (полиадических чисел), составленных из z элементов $(j;i)$-й вертикали трехмерного полиадического числа.

В случае выполнения неравенства (15) величина кода-номера $N_{ji}^{(z)}$ рассчитывается на основе предыдущего значения кода-номера $N_{ji}^{(z-1)}$ по формуле

$$N_{ji}^{(z)} = N_{ji}^{(z-1)}\psi_{jiz} + a_{jiz}, \tag{16}$$

где $N_{ji}^{(z-1)}$ - значение кода-номера, вычисленное для $(z-1)$-го элементов $(j;i)$-й вертикали ТПЧ.

Значение кода-номера $N_{ji}^{(n_c)}$ с учетом последнего a_{jin_c} элемента $(j;i)$-й вертикали вычисляется по формуле

$$N_{ji}^{(n_c)} = N_{ji}^{(n_c-1)}\psi_{jin_c} + a_{jin_c} \to V_{ji}^{(n_c)} \le 2^M - 1; \quad N_{ji}^{(1)} = a_{jin_c} \to V_{ji}^{(n_c)} > 2^M - 1, \tag{17}$$

где $N_{ji}^{(n_c-1)}$ - значение кода-номера для $(n_c - 1)$ элементов $(j;i)$-й вертикали; $N_{ji}^{(1)}$ - значение кода-номера, образованного на базе элемента a_{jin_c}; $V_{ji}^{(n_c)}$ - накопленное произведение оснований ψ_{jiz} для n_c сечений $(j;i)$-й высоты

$$V_{ji}^{(n_c)} = \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} \le 2^M - 1.$$

Вертикальная обработка заканчивается тогда, когда обработаны по отдельности все вертикали ТПЧ.

Горизонтальная обработка. Строчное направление формирование кода-номера заключается в рассмотрении кодов-номеров $N_{ji}^{(z)}$ отдельных вертикалей ТПЧ как элементов одномерного полиадического числа. Причем необходимо учитывать, что значения номеров $N_{ji}^{(z)}$ ограничены сверху величинами $V_{ji}^{(z)}$:

$$N_{ji}^{(z)} < V_{ji}^{(z)}, \text{ для } z=\overline{1, n_c}.$$

При обработке i-го номера $N_{ji}^{(z)}$ выполняются следующие действия:

- проверяется условие на переполнение машинного слова. Для этого вычисляется величина $V_j^{(i,n_c)}$, равная количеству допустимых комбинаций, составленных из $(i \times n_c)$ элементов трехмерного полиадического числа

$$V_j^{(i,n_c)} = \prod_{k=1}^{i} \prod_{z=1}^{n_c} \psi_{jkz} = \prod_{k=1}^{i} V_{jk}^{(n_c)} \le 2^M - 1. \tag{18}$$

Если значение величины $V_j^{(i,n_c)}$ не превышает величины $2^M - 1$, то рекуррентное выражение, обеспечивающее вычисление кода-номера $N_j^{(i,n_c)}$ для $(i \times n_c)$ элементов имеет вид

$$N_j^{(i,n_c)} = N_j^{(i-1,n_c)} V_{ji}^{(n_c)} + N_{ji}^{(n_c)}, \tag{19}$$

где $N_j^{(i-1,n_c)}$ - значение кода-номера для $((i-1) \times n_c)$ элементов, т.е. для последовательности кодов-номеров $\{N_{j1}^{(n_c)}, \dots, N_{jk}^{(n_c)}, \dots N_{ji}^{(n_c)}\}$.

В противном случае, когда неравенство (18) не выполняется, то код-номер равен $N_j^{(i)} = N_{ji}^{(n_c)}$, где $N_j^{(i)}$ - значение кода-номера, полученное для полиадического числа, состоящего из одного элемента $N_{ji}^{(n_c)}$.

Для доказательства того, что правило, заданное неравенством (18) может использоваться для исключения случаев переполнения машинного слова необходимо показать, что величина $V_j^{(i,n_c)}$ является верхней границей диапазона значений величины $N_j^{(i,n_c)}$. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема о верхней границе кода-номера вертикальной плоскости ТПЧ. Значение кода-номера $N_j^{(i,n_c)}$ полиадического числа, элементами которого являются номера $N_{ji}^{(n_c)}$ вертикалей трехмерного полиадического числа ограничено сверху величиной $V_j^{(i,n_c)}$:

$$N_j^{(i,n_c)} < V_j^{(i,n_c)}. \tag{20}$$

Доказательство. Распишем рекуррентное выражение (18) для значения кода-номера $N_j^{(i,n_c)}$:

$$N_j^{(i,n_c)} = N_j^{(i-1,n_c)} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} + N_{ji}^{(n_c)} =$$

$$= N_{j1}^{(n_c)} \prod_{\xi=2}^{i} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{j\xi\gamma} + \ldots + N_{jk}^{(n_c)} \prod_{\xi=k+1}^{i} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{j\xi\gamma} + \ldots + N_{j,i-1}^{(n_c)} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} + N_{ji}^{(n_c)} \ .$$

или с учетом формулы (16)

$$N_j^{(i,n_c)} = N_{j1}^{(n_c)} \prod_{\xi=2}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + N_{jk}^{(n_c)} \prod_{\xi=k+1}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + N_{j,i-1}^{(n_c)} V_{ji}^{(n_c)} + N_{ji}^{(n_c)} \ .$$

Введем замену величин $N_{ji}^{(n_c)}$ в последнем соотношении на величину $(V_{ji}^{(n_c)} - 1)$. При этом с учетом неравенства $N_{ji}^{(n_c)} \le (V_{ji}^{(n_c)} - 1)$ получим

$$= N_{j1}^{(n_c)} \prod_{\xi=2}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + N_{jk}^{(n_c)} \prod_{\xi=k+1}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + N_{j,i-1}^{(n_c)} V_{ji}^{(n_c)} + N_{ji}^{(n_c)} \le$$

$$\le (V_{j1}^{(n_c)} - 1) \prod_{\xi=2}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + (V_{jk}^{(n_c)} - 1) \prod_{\xi=k+1}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} + \ldots + (V_{j,i-1}^{(n_c)} - 1) V_{ji}^{(n_c)} + (V_{ji}^{(n_c)} - 1) \le$$

$$\le V_{j1}^{(n_c)} \prod_{\xi=2}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} - 1 = \prod_{\xi=1}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} - 1 \le \prod_{\xi=1}^{i} V_{j\xi}^{(n_c)} = V_j^{(i,n_c)} \ .$$

Следовательно, неравенство (38) выполняется. *Теорема доказана*.

Неравенство (38) обеспечивает исключение случаев переполнения машинного слова.

Обработка j-го столбца ТПЧ завершается после анализа элемента $N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}$. Если выполняется неравенство

$$V_j^{(n_{стр},n_c)} = \prod_{k=1}^{n_{стр}} \prod_{z=1}^{n_c} \psi_{jkz} = \prod_{k=1}^{n_{стр}} V_{jk}^{(n_c)} \le 2^M - 1\,, \qquad (21)$$

то значение кода-номера $N_j^{(n_{стр}-1,n_c)}$, полученное на предыдущем шаге, увеличивается на значение величины $N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}$:

$$N_j^{(n_{стр},n_c)} = N_j^{(n_{стр}-1,n_c)} V_{j,n_{стр}}^{(n_c)} + N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}\,, \qquad (22)$$

где $N_j^{(n_{стр},n_c)}$ - значение кода-номера для последовательности величин $\{N_{j1}^{(n_c)},\ldots,N_{jk}^{(n_c)},\ldots N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}\}$.

В противном случае, когда неравенство (21) не выполняется, то значение кода-номера $N_j^{(n_{стр})}$ на $n_{стр}$-м шаге обработки j-го столбца равно $N_j^{(n_{стр})} = N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}$.

В результате обработки всех последовательностей $\{N_{j1}^{(n_c)},\ldots,N_{jk}^{(n_c)},\ldots N_{j,n_{стр}}^{(n_c)}\}$ по всем столбцам ТПЧ $j = \overline{1, n_{стб}}$ получим последовательность кодов-номеров

$$\{N_1^{(n_{стр},n_c)},\ldots,N_j^{(n_{стр},n_c)},\ldots,N_{n_{стб}}^{(n_{стр},n_c)}\}. \qquad (23)$$

Поскольку в соответствии с неравенством (20) значение кода-номера ограничено сверху соответствующей величиной $V_j^{(i,n_c)}$, то последовательность (23) можно рассматривать как полиадическое число. Тогда допускается провести дополнительную постолбцовую обработку трехмерного полиадического числа по следующей схеме:

1. Если выполняется неравенство

$$V^{(j,n_{стр},n_c)} = \prod_{\eta=1}^{j}\prod_{i=1}^{n_{стр}}\prod_{z=1}^{n_c}\psi_{\eta i z} = \prod_{\eta=1}^{j}\prod_{i=1}^{n_{стр}} V_{\eta i}^{(n_c)} = \prod_{\eta=1}^{j} V_{\eta}^{(n_{стр},n_c)} \le 2^M - 1, \quad (24)$$

то значение кода-номера $N^{(j,n_{стр},n_c)}$ для $(j \times n_{стр} \times n_c)$ элементов трехмерного полиадического числа равно

$$N^{(j,n_{стр},n_c)} = N^{(j-1,n_{стр},n_c)} V_j^{(n_{стр},n_c)} + N_j^{(n_{стр},n_c)}, \quad (25)$$

где $N^{(j-1,n_{стр},n_c)}$ - значение кода-номера на предыдущем шаге для $((j-1) \times n_{стр} \times n_c)$ элементов ТПЧ.

2. Наоборот когда $V^{(j,n_{стр},n_c)} > 2^M - 1$, тогда значение кода-номера на j-м шаге обработки будет равно $N^{(j,n_{стр},n_c)} = N_j^{(n_{стр},n_c)}$.

Чтобы для исключения переполнения машинного слова воспользоваться правилом (23) требуется показать, что значение кода $N^{(j,n_{стр},n_c)}$ ограничено сверху величиной $V^{(j,n_{стр},n_c)}$. Для этого докажем следующую теорему

Теорема о верхней границе кода-номера $N^{(j,n_{стр},n_c)}$. Значение кода-номера $N^{(j,n_{стр},n_c)}$ полиадического числа (23), элементами которого являются номера $N_j^{(n_{стр},n_c)}$ вертикальных плоскостей ТПЧ ограничено сверху величиной $V^{(j,n_{стр},n_c)}$:

$$N^{(j,n_{стр},n_c)} < V^{(j,n_{стр},n_c)}. \quad (26)$$

Доказательство. Распишем рекуррентное выражение (25) для значения кода-номера $N^{(j,n_{стр},n_c)}$:

$$N^{(j,n_{стр},n_c)} = N^{(j-1,n_{стр},n_c)} V_j^{(n_{стр},n_c)} + N_j^{(n_{стр},n_c)} = N_1^{(n_{стр},n_c)} \prod_{\eta=2}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} + \ldots +$$

$$+ N_{\xi-1}^{(n_{стр},n_c)} \prod_{\eta=\xi}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} + \ldots + N_{j-1}^{(n_{стр},n_c)} V_j^{(n_{стр},n_c)} + N_j^{(n_{стр},n_c)}.$$

Введем замену кода-номера $N_j^{(n_{стр},n_c)}$ на величину $(V_j^{(n_{стр},n_c)} - 1)$. Тогда с учетом неравенства (20) последнее выражение имеет следующую верхнею границу:

$$N^{(j,n_{стр},n_c)} \le (V_1^{(n_{стр},n_c)} - 1) \prod_{\eta=2}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} + \ldots + (V_{\xi-1}^{(n_{стр},n_c)} - 1) \prod_{\eta=\xi}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} + \ldots +$$

$$+ (V_{j-1}^{(n_{стр},n_c)} - 1) V_j^{(n_{стр},n_c)} + (V_j^{(n_{стр},n_c)} - 1) = \prod_{\eta=1}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} - 1 \le \prod_{\eta=1}^{j} V_\eta^{(n_{стр},n_c)} = V^{(j,n_{стр},n_c)}.$$

Отсюда следует, что неравенство (26) выполняется для $j = \overline{1, n_{стб}}$. *Теорема доказана*.

3. На завершающем этапе код-номер $N^{(3)}$ для всех элементов ТПЧ равен значению кода-номера $N^{(n_{стб},n_{стр},n_c)}$, сформированного для последнего номера $N_{n_{стб}}^{(n_{стр},n_c)}$ вертикального сечения трехмерной структуры

$$N^{(3)} = N^{(n_{стб}, n_{стр}, n_c)} = N^{(n_{стб}-1, n_{стр}, n_c)} V_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)} + N_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)}, \qquad (27)$$

где $N^{(n_{стб}-1, n_{стр}, n_c)}$ - значение кода для $((n_{стб}-1) \times n_{стр} \times n_c)$ элементов ТПЧ.

Таким образом, на основе выражений (15) – (27) построено трехмерное полиадическое кодирование для варианта равномерной разрядной сетки и переменного количества элементов ПЧ, т.е. $m = var$, $S(N^{(3)}) = const$. Разработанное кодирование обеспечивает исключение комбинаторной избыточности, обусловленной неоднородностью динамического диапазона по трем направлениям трехмерной структуры без потери информации.

Рассмотрим построение полиадического нумератора в случае, когда количество элементов ТПЧ фиксировано, а длина разрядной сетки на представление кода-номера является переменной, т.е. $m = const$; $S(N^{(3)}) = var$. Допустим, что количество элементов ТПЧ равно $m = n_{стб} \times n_{стр} \times n_c$ и известно заранее. Условие $S(N^{(3)}) = var$ позволяет выбирать необходимое количество разрядов на представление кода-номера $N^{(3)}$. Тогда создание нумератора трехмерных полиадических чисел сводится к выводу соотношения для определения величины весового коэффициента ω_{jiz}. Для этого сформулируем и докажем следующую теорему

Теорема о весовом коэффициенте ТПЧ. Для известной длины трехмерного полиадического числа и переменной длины кодограммы значение весового коэффициента ω_{jiz} для (jiz)-го элемента находится по формуле

$$\omega_{jiz} = \prod_{\gamma=z+1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} \prod_{k=i+1}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{jk\gamma} \prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}} \prod_{k=1}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{\eta k \gamma}. \qquad (28)$$

Доказательство. Вывод выражения (28) будем проводить на основе рекуррентного соотношения (27). Для этого последовательно распишем значения предыдущих кодов-номеров предыдущих шагов обработки

$$N^{(3)} = N^{(n_{стб}, n_{стр}, n_c)} = N^{(n_{стб}-1, n_{стр}, n_c)} V_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)} + N_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)} = N_1^{(n_{стр}, n_c)} \prod_{\eta=2}^{n_{стб}} V_\eta^{(n_{стр}, n_c)} +$$

$$+ \ldots + N_{\xi-1}^{(n_{стр}, n_c)} \prod_{\eta=\xi}^{n_{стб}} V_\eta^{(n_{стр}, n_c)} + \ldots + N_{n_{стб}-1}^{(n_{стр}, n_c)} V_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)} + N_{n_{стб}}^{(n_{стр}, n_c)}. \qquad (29)$$

Преобразуем формулу (29) с учетом соотношений для величин $N_\xi^{(n_{стр}, n_c)}$, $\xi = \overline{1, n_{стб}}$:

$$N^{(3)} = (N_{11}^{(n_c)} \prod_{i=2}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{1i\gamma} + \ldots + N_{1k}^{(n_c)} \prod_{i=k+1}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{1i\gamma} + \ldots +$$

$$+ N_{1, n_{стр}-1}^{(n_c)} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{1, n_{стр}, \gamma} + N_{1, n_{стр}}^{(n_c)}) \prod_{\eta=2}^{n_{стб}} V_\eta^{(n_{стр}, n_c)} + \ldots +$$

$$+ (N_{j1}^{(n_c)} \prod_{i=2}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} + \ldots + N_{jk}^{(n_c)} \prod_{i=k+1}^{n_{стр}} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{ji\gamma} + \ldots +$$

$$+ N_{j, n_{стр}-1}^{(n_c)} \prod_{\gamma=1}^{n_c} \psi_{j, n_{стр}, \gamma} + N_{j, n_{стр}}^{(n_c)}) \prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}} V_\eta^{(n_{стр}, n_c)} + \ldots +$$

$$+\left(N^{(n_c)}_{n_{стб}-1,1}\prod_{i=2}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб}-1,i\gamma}+\ldots+N^{(n_c)}_{n_{стб}-1,k}\prod_{i=k+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб}-1,i\gamma}+\ldots+\right.$$

$$\left.+N^{(n_c)}_{n_{стб}-1,n_{стр}-1}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб}-1,n_{стр},\gamma}+N^{(n_c)}_{n_{стб}-1,n_{стр}}\right)V^{(n_{стр},n_c)}_{n_{стб}}+$$

$$+\left(N^{(n_c)}_{n_{стб},1}\prod_{i=2}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб},i\gamma}+\ldots+N^{(n_c)}_{n_{стб},k}\prod_{i=k+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб},i\gamma}+\ldots+\right.$$

$$\left.+N^{(n_c)}_{n_{стб},n_{стр}-1}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{n_{стб},n_{стр},\gamma}+N^{(n_c)}_{n_{стб},n_{стр}}\right).$$

Свернув слагаемые в последнем выражении под знак суммы, получим

$$N^{(3)}=\left(\sum_{j=1}^{n_{стб}}\sum_{i=1}^{n_{стр}}N^{(n_c)}_{ji}\prod_{k=i+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{jk\gamma}\right)\prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}}V^{(n_{стр},n_c)}_{\eta}. \quad (30)$$

Заменим в формуле (30) величины $N^{(n_c)}_{ji}$ для $1\le j\le n_{стб}$, $1\le i\le n_{стр}$ на соотношение

$$N^{(n_c)}_{ji}=N^{(n_c-1)}_{ji}\psi_{jin_c}+a_{jin_c}=a_{ji1}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}+\ldots+a_{ji,z-1}\prod_{\gamma=z}^{n_c}\psi_{ji\gamma}+\ldots+$$

$$+a_{ji,n_c-1}\psi_{jin_c}+a_{jin_c}=\sum_{z=1}^{n_c}a_{jiz}\prod_{\gamma=z+1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}.$$

После чего значение кода-номера $N^{(3)}$ будет равно

$$N^{(3)}=\left(\sum_{j=1}^{n_{стб}}\sum_{i=1}^{n_{стр}}\sum_{z=1}^{n_c}a_{jiz}\prod_{\gamma=z+1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}\prod_{k=i+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{jk\gamma}\right)\prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}}V^{(n_{стр},n_c)}_{\eta}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n_{стб}}\sum_{i=1}^{n_{стр}}\sum_{z=1}^{n_c}a_{jiz}\prod_{\gamma=z+1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}\prod_{k=i+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{jk\gamma}\right)\prod_{i=1}^{n_{стр}}\prod_{z=1}^{n_c}\psi_{\eta iz}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_{стб}}\sum_{i=1}^{n_{стр}}\sum_{z=1}^{n_c}a_{jiz}\prod_{\gamma=z+1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}\prod_{k=i+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{jk\gamma}\prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}}\prod_{i=1}^{n_{стр}}\prod_{z=1}^{n_c}\psi_{\eta iz}. \quad (31)$$

Анализируя сомножитель при элементе a_{jiz}, приходим к выводу, что

$$\omega_{jiz}=\prod_{\gamma=z+1}^{n_c}\psi_{ji\gamma}\prod_{k=i+1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{jk\gamma}\prod_{\eta=j+1}^{n_{стб}}\prod_{k=1}^{n_{стр}}\prod_{\gamma=1}^{n_c}\psi_{\eta k\gamma}.$$

Следовательно, выражение (28) доказано. *Теорема доказана*.

Значит соотношения (10) и (28) позволяют сформировать код-номер переменой длины для трехмерного полиадического числа фиксированной длины.

4. Выводы

1. Доказано, что количество ТСД с ограниченным неравномерным динамическим диапазоном по трем направлениям будет меньше, чем количество трехмерных структур с равномерным динамическим диапазоном. Для оценки потенциальные возможности по степени сжатия за счет трехмерной обработки разработано выражение для определения количества минимальной сокращаемой избыточности в результате учета неравномерных ограничений на динамический диапазон элементов ТСД одновременно по трем направлениям.

2. Обосновано, что трехмерная полиадическая система формируется на базе ограничений на динамический диапазон и позволяет учитывать неоднородности в динамических диапазонах трехмерной структуры одновременно по трем координатам.

3. Построена система выражений, обеспечивающая формирование кода-номера для трехмерного полиадического числа на основе рекуррентно-последовательной схемы, состоящей из двух этапов: вертикального и горизонтального проходов ТСД в направлении «по вертикалям сверху – вниз, по столбцам в глубину параллелепипеда и по строкам слева – направо». На основе доказанных теорем о верхних границах кода-номера вертикальной и горизонтальной обработки определены величины, ограничивающие их значения сверху. Это обеспечивает построение правил проверки на переполнение машинного слова на каждом этапе обработки ТСД. Разработанное кодирование обеспечивает исключение комбинаторной избыточности, обусловленной неоднородностью динамического диапазона по трем направлениям трехмерной структуры без потери информации. При этом учитываются следующие условия: количество элементов полиадического числа заранее не известно; количество разрядов на представление кода-номера ТПЧ является постоянным (заранее заданным).

4. Разработано трехмерное полиадическое кодирование на основе нумератора для случая, когда количество элементов ТПЧ фиксировано, а длина разрядной сетки на представление кода-номера является переменной. Для этого доказана теорема, позволяющая определить весовые коэффициенты элементов трехмерного полиадического числа.

5.Созданные методы обеспечивают: повышения степени компактного представления без внесения погрешностей; сокращение комбинаторной избыточности, обусловленной наличием ограничений на динамический диапазон элементов видеоданных; обработку одновременно по трем координатам; исключение потерь информации, вызванных переполнением машинного слова; количество операций на обработку, не превышающее порядка $O(n^2)$.

Список литература

1. Ватолин В.И., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2002. – 384 с.
2. Бондарев В.Н, Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. – Харьков: Конус, 2001. – 398 с.
3. Королев А.В., Баранник В.В. Метод сокращения избыточности изображений // Інформаційно-керуючи системи на залізничному транспорті. – 2001. – №2. – С. 85- 88.
4. Баранник В.В. Рельефное представление изображений пирамидальным кодированием // Інформаційно-керуючи системи на залізничному транспорті. – 2001. - №1. – С. 17 – 25.
5. Баранник В.В. Метод трехмерного кодирования данных Системи обробки інформації. – Харків: ХВУ. – 2003. – Вип. 1. – С. 42 – 46.