УДК 621.833.7 Г.О.Приймаков

Стійкість металополімерних гнучких коліс силових хвильових зубчастих коліс

Національний техничний університет «ХПІ»

Силові хвильові зубчасті передачі (СХЗП) мають багато переваг, [1, 2], і широко використовуються у вітчизняному та зарубіжному машинобудуванні, [1, 2].

Основними елементами таких передач є гнучке металополімерне зубчасте колесо (МГК), що являє собою довгу конструктивно-ортотропну оболонку із зовнішнім зубчастим вінцем (або двома), підкреплену зсередини полімерним кільцем, [1, 2], як шпангоутом. При великих значеннях частоти обертання генератора хвиль ($n \sim 3000 \ldots 10000$ хв$^{-1}$) та при великих зовнішніх навантаженнях постає проблемам забезпечення стійкості таких оболонок, причому, при осьовому стиску (із-за наявності осьової складової зубчастого зачеплення), при зовнішньому радіальному стиску (під дією генератора хвиль) і при тангенційнрму навантаженні із-за передачі обертального момента $M_{кр.}$

Отже, метою цієї статті є комплексне дослідження стійкості оболонок гнучких коліс СХЗП під дією можливих навантажень в процесі експлуатації.

Відомо, що довга конструктивно-ортотропна оболонка, підкреплена зсередини полімерним шпангоутом, при навантаженні її зусиллями T_1^0, T_2^0 ,S_0 відносно її серединної поверхні буде піддаватися згину від самого початку навантаження.

Стійкість оболонки визначається критичним навантаженням , тобто найменшим навантаженням, при якому можливі інші згинні форми рівноваги, що характеризується появою хвиле утворень на її поверхні.

Прийнявши основний стан оболонки за висхідний, тобто деформування гнучкого колеса відбувається лише від генератора хвиль і в площині генератора, нормальну складову зовнішнього навантаження, що викликає випучення оболонки , можна записати так:

$$P = T_1^0 e_1 + T_2^0 e_2 + S^0 e_3, \tag{1}$$

Як відомо, при дослідженні стікості циліндричних конструктивно-ортотропних оболонок з достатньою точністю для практичного використання можна скористатися теорією пологих оболонок. Згідно теорії пологих оболонок в рівняннях рівноваги в тангенційнрму напрямку можна знехтувати перерізаючими силами, а викривлення оболонки з достатньою точністю можна описати лише нормальними компонентами переміщення.

Для пологої конструктивно-ортотропної довгої циліндричної оболонки співвідношення пружності запишемо у вигляді:

$$T_1 = B_{11}\frac{\partial U}{\partial x} + \nu B\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\varpi}{R}\right) - A_{11}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2};$$

$$T_2 = \nu B\frac{\partial U}{\partial x} + B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\varpi}{R}\right) - A_{22}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2};$$

$$S = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - A_{33}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y}, \tag{2}$$

$$G_1 = D_{11}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} - A_{11}\frac{\partial U}{\partial x};$$

$$G_2 = \nu D\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} - A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\varpi}{R}\right);$$

$$H_1 = D_{13}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} - \frac{A_{33}}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$H_2 = D_{23}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} - \frac{A_{33}}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{3}$$

В системах (2) і (3) позначено:

ε_1, ε_2, $\varpi = 2\varepsilon_3$ – відносні видовження і зсув серединної поверхні оболонки, e_1, e_2, e_3 – її зміна кривизни та кручення,

u, v - компоненти переміщення вздовж координатних ліній,

ϖ – компонент переміщення по зовнішній нормалі,

B – жорсткість металічної частини оболонки при розтягу-зтиску $B=Eh/(1-\nu^2)$

D – жорсткість металічної частини оболонки при згині, $D= Eh^3/(1-\nu^2)$,

E, ν - приведенні значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона метало-полімерної оболонки,

h – загальна товщина оболонки, виміряна у впадинах зубчастого вінця,

B_{11} – жорсткість підкріпленої оболонки при розтягу в напрямку осі x,

B_{22} –жорсткість підкріпленої оболонки при розтягу в напрямку осі y,

D_{11} – параметр жорстокості підкріпленої оболонки при зміні в напрямку осі x

D_{22} – параметр жорстокості підкріпленої оболонки при зміні в напрямку осі y

D_{13} – жорсткість підкріпленої оболонки при крученні навколо осі x,

D_{23} – жорсткість підкріпленої оболонки при крученні навколо осі y,

R – радіус серединної поверхні,

Параметри A_{11}, A_{22}, A_{33} є коефіцієнтами впливу, що характеризують згинні деформації, що виникають при розтягу-зтиску та зсуві оболонки і навпаки, ці параметри пропорційні статистичним моментам поперечних перерізів відносно осей, що лежать в серединній поверхні оболонки.

При симетричному розміщенні шпангоута $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ (конструктивно-ортотропна оболонка).

Систему диференційних рівнянь нейтральної рівноваги циліндричної оболонки представимо у формі:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \qquad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \qquad S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \tag{4}$$

Φ - функція напружень,

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(H_1 + H_2) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + \frac{T_2}{R} = -\left(T_1^0\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + T_2^0\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + T_3^0\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y}\right), \tag{5}$$

До рівнянь рівноваги (4), що представлені в зусиллях, слід додати умову щільності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

В умові (6) згідно теорії пологих оболонок нехтуємо зміною геометричних розмірів оболонки порівняно зі зміною напружено-деформованого стану при випучуванні.

Розв'язуючи співвідношення пружності (2) відносно компонентів деформації, з врахуванням (4), отримуємо:

$$(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\varepsilon_1 = B_{22}\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}-\nu B\frac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}+B_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\nu B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\varepsilon_2 = B_{11}\frac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}-\nu B\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\nu B\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\varepsilon_3 = \frac{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}{B(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2\varpi}{\partial x\partial y}-\frac{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}{B(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \qquad (7)$$

Підставляючи вирази системи (7) в рівняння спільності деформацій (6), а співвідношення системи (3) в рівняння рівноваги (5), обираємо наступну систему диференційних рівнянь:

$$\nabla_1\varpi+\nabla_2\Phi = (B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\left(T_1^0\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+T_2^0\frac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2\varpi}{\partial x\partial y}\right);$$

$$\nabla_2\varpi = \nabla_3\Phi, \qquad (8)$$

Тут $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$- диференціальні оператори в приватних похідних до четвертого порядку:

$$\nabla_1 = [D_{11}(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)-B_{22}]\frac{\partial^4}{\partial x^4}+[D_{22}(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)]\frac{\partial^4}{\partial y^4}+$$
$$\left[2\nu D(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)-B+(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)(D_{13}D_{23})-\frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{B(1-\nu)}\right]\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}, \qquad (9)$$

$$\nabla_2 = \nu B\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\nu B\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\left[B_{11}+B_{22}-\frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{B(1-\nu)}\right]\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \qquad (10)$$

$$\nabla_3 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{B(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+B_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}, \qquad (11)$$

Виключаючи із рівнянь (8) функцію напружень Φ, отримуємо диференційне рівняння, що описує стійкість довгої циліндричної металополімерної оболонки при комбінованому навантаженні:

$$(\nabla_1\nabla_2+\nabla_2^2)\varpi = (B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\left(T_1^0\frac{\partial^2}{\partial x^2}+T_2^0\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\nabla_3\varpi, \qquad (12)$$

Підставляючи в рівняння (12) розв'язок у вигляді:

$$\varpi = A\sin(\lambda x \pm \eta y), \qquad (13)$$

Що описує скошені форми хвилеутворення і де:

$$\lambda = \frac{m\pi}{l};\quad \eta = \frac{n}{R}, \qquad (14)$$

l – довжина оболонки.

Отримуємо наступне основне співвідношення для визначення критичних навантажень при комбінованому навантаженні металополімерної оболонки:

$$-(T_1^0\lambda^2+T_2^0\eta^2+2S^0\lambda\eta)_{кр} = \left[\psi_1+(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\left(\frac{\psi_2^2}{\psi_3}-2\frac{\lambda^2\psi_2}{R\psi_3}+\frac{\lambda^4}{R^2\psi_3}\right)\right], \qquad (15)$$

У формулі (15):

$$\psi_1(\lambda,\eta) = \left(D_{11} - \frac{B_{22}}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}\right)\lambda^4 + \left(D_{22} - \frac{B_{11}}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}\right)\eta^4 + \left[2\nu D + D_{13} + D_{23} - \frac{B}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2} - \frac{2}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2} - \frac{2}{B(1-\nu)}\right]\lambda^2\eta^2$$

, (16)

$$\psi_2(\lambda,\eta) = \frac{\nu B}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}\lambda^4 + \frac{\nu B}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}\eta^4 - \left[\frac{B_{22}+B_{11}}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2} - \frac{2}{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}\right]\lambda^2\eta^2$$

, (17)

$$\psi_2(\lambda,\eta) = B_{11}\lambda^4 + B_{22}\eta^4 + \frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{B(1-\nu)}\lambda^2\eta^2, \qquad (18)$$

Очевидно, критеріальна оцінка стійкості МГК полягає в наступному:

$P_{кр} < -(T_1^0\lambda^2 + T_2^0\eta^2 + 2S^0\lambda\eta)_{кр}$;(19)

Параметри λ, η визначаються із умови мінімума критичного навантаження, тобто $P_{кр} \Rightarrow min.$ розглянемо окремі випадки навантаження СХЗП і забезпечення стійкості МГК при цьому.

1. Стійкість металополімерних гнучких коліс при осьовому стиску із-за значних осьових сил в зубчастому зачепленні СХЗП.

При осьовому стиску оболонки МГК має місце випадок, коли $T_2^0 = S^0 = 0,$ і, відповідно формулі (15) маємо:

$$(T_1^0)_{кр} = \left[\varphi_1 + (B_{11}B_{22} - \nu^2B^2)\frac{\varphi_2^2}{\varphi_3}\right]\lambda^2 + \frac{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}{R^2\varphi_3\lambda^2} - \frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{R}\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

(20)

Де $\varphi_i = \psi_i(1,\psi)(i = 1,2,3)$;

$$\varphi = \frac{\eta^2}{\lambda^2} = \frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2}, \qquad (21)$$

Де n, m – число півхвиль хвилеутворення.

Найменше значення правої частини виразу (20) по відношенню до параметра λ матиме місце при:

$$\lambda = \frac{2}{R}\sqrt[4]{\frac{B_{11}B_{22}-\nu^2B^2}{\varphi_1\varphi_3(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)\varphi_2^2}}, \qquad (22)$$

І визначається виразом:

$$T_{кр} = \frac{2}{R}\sqrt{(B_{11}B_{22} - \nu^2B^2)[\varphi_1\varphi_3 + (B_{11}B_{22} - \nu^2B^2)]} + \frac{2(B_{11}B_{22}-\nu^2B^2)}{R}\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

(23)

Формула (23) визначає критичне значення осьового навантаження МГК СХЗП, причому, для обох шарів одночасно.

Значення параметра φ знаходиться із умови мінімума правої частини формули (23), коли $T_{кр} \Rightarrow min.$

2. Стійкість МГК під внутрішнім тиском від дії генератора хвиль.

При радіальному стисненні з боку генератора хвиль СХЗП в тілі оболонки МГК $T_2^0 = S^0 = 0$; $T_2^0 = -PR$ і, згідно співвідношенню (15) при втраті стійкості оболонки в поздовжньому напрямі утворюється лише одна півхвиля, тобто m = 1 і $\lambda_1 = \frac{\pi}{l}$.

Отже, для визначення критичного радіального тиску з боку генератора хвиль матиме місце формула:

$$(PR)_{кр} = \left[\theta_1 + (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)\frac{\left(\theta_2 - \frac{\pi^2}{Rl^2}\right)}{\theta_3}\right]\frac{1}{\eta^2}, \tag{24}$$

Де $\theta_i(\lambda_1\eta) = \psi_i(\lambda_1,\eta)$ $(i = 1,2,3)$,

а параметр η визначається із умови мінімума правої частини, тобто при $(PR)_{кр} = min$.

3.Стійкість МГК при тангенційнрму навантаженні із-за передачі обертального моменту $M_{кр.}$

При силовому крученні оболонки МГК $T_1^0 = T_2^0 = 0$, і, відповідно формули (15) критичний обертальний момент $(M_{кр})_{кр}$ визначається виразом:

$$\frac{(Мкр)кр}{2\pi R} = \frac{1}{\lambda\eta}\left[\psi_1 + (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)\frac{\left(\psi_3 - \frac{\lambda^2}{R}\right)}{\psi_3}\right], \tag{25}$$

Параметри λ, η знову вибираються із умови мінімума правої частини і визначають форму втрати стійкості при крученні МГК. Форма втрати стійкості суттєво залежить від характеру з'єднання шарів, від жорсткості елементів з'єднання, їх форми, розмірів і характеру навантаження.

В ході роботи зроблено наступні висновки:

– Створено розрахункові формули для визначення критичних навантажень, характерних для експлуатації СХЗП;
– Дано критеріальну оцінку стійкості оболонок МГК через параметри хвиле утворення λ і η;
– Показано, що параметри λ і η та число півхвиль хвиле утворення n і m визначаються із умови мінімума критичного навантаження;
– Форма втрати стійкості оболонок МГК суттєво залежить від способу з'єднання шарів, від жорсткості елементів з'єднання, їх форми, розмірів і характеру навантаження.

Список літератури

1. Приймаков О.Г., Масягін В.І. Розрахунок і проектування силових хвильових зубчастих передач/ Навчальний посібник. – Харків: вид. ХІВПС ім. Кожедуба, 2003. – 148 с.

2. Полетучий О.І. Основи ,теорії і методи розрахунків хвильових зубчастих механізмів із підвищеними якісними характеристиками / Автореферат дис…докт. техн. наук. – Харків: вид. НТУ "ХПІ", 2006. – 35 с.

3. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949. – 789 с.

4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматиздат, 1963. – 692 с.

5. Панов Д.Ю. Об устойчивости биметаллических оболочек при нагреве. – М.: ПММ, т.V вып. 6, 1947. – с. 238 – 251.