УДК 629.7.01
А. Г. Гребеников, Г.Б.Варшавьяк

Анализ качества свёртки частных критериев векторной оптимизации проектных параметров самолёта транспортной категории на этапе эскизного проектирования

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ»

Оптимизация вектора проектных параметров Х на этапе эскизного проектирования самолёта, нахождение вектора $X^* \in X_{доп}$, отвечающего экстремуму критерия оптимальности $\gamma=\gamma(x_1,x_2,\ldots x_m)$, является задачей математического программирования. Оптимизированный вектор параметров определяется в результате расчёта аналитических функций по определённому алгоритму, так как в явном виде целевые функции не сводимы в единые записи аналитических функций. Поэтому необходимо выбрать метод оптимизации, не требующий задания целевой функции в явном виде и обеспечивающий монотонность приближения к оптимуму, при которой значение критерия оптимальности на каждом шаге не хуже предыдущего.

Для решения задачи поиска оптимальных параметров необходимо провести свёртку частных критериев и получить общую скалярную оценку качества проектной модели – общий критерий эффективности, являющийся производной частных критериев.

В качестве частных критериев оптимальности в работе [2] были рассмотрены критерий минимума массы самолёта и критерий минимума относительной топливной эффективности соответственно:

$$m_0(X) = \frac{m_{эк}(X) + m_{об}(X) + m_{ком}(X)}{1-(m_к(X) + m_{с.у}(X) + m_т(X))}, \qquad (1)$$

где m_0 - взлётная масса самолёта в первом приближении; $m_{эк}$ – масса экипажа; $m_{об}$ – масса оборудования и снаряжения; $m_{ком}$ – масса полезной нагрузки; $m_к$ – относительная масса конструкции; $m_{с.у}$ – относительная масса силовой установки; $m_т$ – относительная масса топлива; $m_{ком}$ – масса коммерческой нагрузки (для пассажирских самолётов региональных авиалиний $m_{ком}$ =100*$n_{пас}$[2]);

и для транспортных самолётов $K_t = \dfrac{m_т}{m_{ком} * L}$, для пассажирских $K_t = \dfrac{m_т}{n * L}$, (2)

где K_t – относительная топливная эффективность; m_t – расход топлива; $m_{ком}$ – масса коммерческой нагрузки (для пассажирских самолётов региональных авиалиний n – число пассажиров); L – дальность полёта.

Для решения задачи оптимизации необходимо провести свёртку частных критериев и получить общую скалярную оценку качества модели по какому-либо методу. Целью свёртки частных критериев векторной оптимизации проектных параметров самолёта транспортной категории на этапе эскизного проектирования является получение общей скалярной оценки качества проектной модели.

В предыдущей работе [1] нами был выбран метод оптимизации, не требующий задания целевой функции в явном виде и обеспечивающий монотонность приближения к оптимуму (значение критерия оптимальности на каждом шаге не хуже предыдущего). В качестве теоретической основы формирования обобщённых многокритериальных скалярных оценок была применена теория полезности [2]. Обобщённая полезность является количественной оценкой предпочтительности решения

$$Q(x) = G[\gamma_i(X)], i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

где Q(x) – количественная оценка полезности решения, G – оператор функции полезности. Если решения $X_1, X_2 \in X_{доп}$ и X_1 предпочтительнее X_2, то $Q(X_1) > Q(X_2)$.

Решение задачи структурной и параметрической идентификации функции полезности (3) является обоснованием правила (метрики), по которому формируется полезность решения в пространстве частных критериев $\gamma_i(X)$. Поскольку объективной метрики не существует, то принцип ранжирования решений отражает предпочтения конкретного лица, принимающего решения.

Выбрав аддитивную форму функции полезности, при которой общий показатель эффективности определяется суммой частных критериев эффективности, и учитывая, что вес частных критериев не равнозначен, формулу (3) можно записать как $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \gamma_i(X)$ [2].

В качестве первого варианта свёртки в работе [1] была выбрана запись

$$Q_i[\gamma_i(X)] = \left(\frac{\gamma_i(X) - \gamma_{i\max}}{\gamma_{i\min} - \gamma_{i\max}}\right)^{\alpha_i}, \qquad (4)$$

где $\gamma_i(X)$ – значение частного критерия; $\gamma_{i\min}, \gamma_{i\max}$ – наилучшее и наихудшее значение частного критерия, которые он принимает на области допустимых решений $X_{доп.}$; α_i – коэффициэнт, учитывающий вес и предпочтение *i*-го критерия, при этом $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

В качестве частных критериев оптимальности $\gamma_i(X)$ согласно работе [2] приняты критерий минимума массы самолёта *M* и критерий минимума относительной топливной эффективности K_t соответственно.

Таким образом, аддитивная формула свёртки частных критериев оптимальности имеет вид

$$Q(X) = \left(\frac{\gamma_1(X) - m_{0\max}}{m_{0\min} - m_{0\max}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{\gamma_2(X) - K_{t\max}}{K_{t\min} - K_{t\max}}\right)^{\alpha_2}. \qquad (5)$$

В качестве примера было проведено исследование области значений параметров, близких к значениям параметров пассажирского самолёта Ан–140. Начальные значения варьируемых параметров крыла сгенерированы с помощью датчика случайных чисел в окрестностях реальных значений параметров крыла самолёта Ан–140 для одного из вариантов записи формулы свёртки общего критерия (5) и значений весовых коэффициентов ½ и ½ соответственно.

В работе [4] приводятся и другие способы решения задачи многокритериальной оптимизации при решении экономических задач. Необходимо сформулировать методику для выбора того или иного варианта свёртки частных критериев оптимизации.

Свёртка критериев является математическим методом, специально предназначенным для сжатия информации и количественной характеристики интегрированных свойств анализируемого материала.

Анализируемым материалом в нашем случае может послужить сделанная случайным образом в окрестностях локального минимума значений частных или общего критериев выборка значений вектора проектных параметров X, соответствующих ему значений частных критериев M(X), T_{opt}(X) и общего критерия Q(X).

Получив выборку в n значений вектора параметров и значений критериев, можем применить кластерный анализ. Проведя разбиение на четыре кластера по методу Варда [4], получаем несколько различных разбиений для каждого сочетания частных и общего критериев.

Сходство между разбиениями является показателем потерь информации при свертке критериев. Этот показатель можно использовать при выборе конкретного варианта формулы свёртки частных критериев (3).

Для оценки близости между двумя различными разбиениями в [4] была введена величина

$$v(Q,Y)=\frac{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i\right|^2+\sum_{j=1}^{n}\left|Y_j\right|^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|Q_i\bigcap Y_j\right|^2}{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i\right|^2+\sum_{j=1}^{n}\left|Y_j\right|^2\right)}, \qquad (6)$$

где Q и Y – результаты разбиения областей решения кластерным анализом по методу Варда на n кластеров соответственно по общему и частным критериям.

Если разбиения Q и Y в точности совпадают, то $\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i\right|^2+\sum_{j=1}^{n}\left|Y_j\right|^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|Q_i\bigcap Y_j\right|^2$ и свёртка частных критериев прошла без потерь информации.

Если разбиения Q и Y не содержат ни одного общего элемента, то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|Q_i\bigcap Y_j\right|^2$ =0.

Величина v(Q,Y) равна нулю при полностью совпадающих способах разбиения и единице - при полностью несовпадающих [4].

Оценим качество аддитивного варианта свёртки частных критериев (5).

Для этого получим случайным образом 500 векторов проектных параметров X в окрестностях $X_{опт}$ таким образом, чтобы значение каждого проектного параметра x_i случайным образом изменялось в пределах в промежутке $x_i^{опт}-(x_i^{допmax}-x_i^{допmin})*0.05<x_i<x_i^{опт}+(x_i^{допmax}-x_i^{допmin})*0.05$.

Вычислим для каждого из векторов X значения частных и общего критериев и проведём разбиение по методу Варда на четыре кластера отдельно по общему критерию Q и Y_1, Y_2 (частным критериям минимума массы и топливной эффективности).

Повторим вычисления оценки близости между этими двумя разбиениями по семь раз для различных значений весовых коэффициентов α_i, отбросим наименьшее и наибольшее значения и занесём результаты вычисления оценки близости между разбиениями по общему и частным критериям в табл. 1.

Таблица 1

Оценка близости между кластерами разбиения для аддитивной функции полезности в области $X_{опт}$

Весовые коэфф-ты	α_1=1/3 α_2=2/3	α_1=1/2 α_2=1/2	α_1=2/3 α_2=1/3
Значение оценки близости v(Q,Y)	0.724471157	0.728152156	0.722475229
	0.731718002	0.728665861	0.725372435
	0.727532728	0.739948541	0.72685585
	0.728689166	0.739850045	0.72840323
	0.732149	0.729102763	0.727845
Среднее значение	0.733753	0.728302763	0.72619029
Дисперсия значений	3.38E-05	6.93183E-06	5.64E-06

Повторим измерения, случайно выбирая значения вектора проектных параметров X в пространстве Парето за пределами области локального оптимума таким образом, чтобы значение каждого проектного параметра x_i случайным образом изменялось в пределах в промежутке $x_i^{опт}-(x_i^{допmax}-x_i^{допmin})\cdot 0.5<x_i < x_i^{опт} +(x_i^{допmax}- x_i^{допmin})\cdot 0.5$.

Таблица 2

Оценка близости между кластерами разбиения для аддитивной функции полезности в пространстве Парето за пределами области локального оптимума

Весовые коэфф-ты	α_1=1/3 α_2=2/3	α_1=1/2 α_2=1/2	α_1=2/3 α_2=1/3
Значение оценки близости v(Q,Y)	0.23351	0.293572131	0.28700144
	0.24053	0.397004506	0.33452774
	0.412713	0.421299683	0.34353875
	0.334872	0.452640845	0.44235099
	0.356245	0.485800469	0.48087085
Среднее значение	0.315574	0.410063527	0.37765796
Дисперсия значений	0.005957	0.005353987	0.00652026

Можно предположить, что в пределах небольшой области локального оптимума общего критерия значения частных и общего критериев близки друг к другу, поэтому на результат разбиения выборок на кластеры по методу Уарда оказывает большее влияние случайность выбора векторов проектных параметров X. В связи с этим величина оценки близости v(Q,Y) дальше от оптимального значения (от нуля), чем оценка близости в неоптимальной области пространства Парето.

Для сравнения таким же образом проанализируем мультипликативный вариант свёртки частных критериев оптимальности

$$Q(X)=\left(\frac{\gamma_1(X)-m_{0\max}}{m_{0\min}-m_{0\max}}\right)^{\alpha_1} * \left(\frac{\gamma_2(X)-K_{t\max}}{K_{t\min}-K_{t\max}}\right)^{\alpha_2}. \qquad (7)$$

Таблица 3

Оценка близости между кластерами разбиения для мультипликативной функции полезности в области $X_{опт}$

	α_1=1/3 α_2=2/3	α_1=1/2 α_2=1/2	α_1=2/3 α_2=1/3
Значение оценки близости v(Q,Y)	0.738345	0.736317	0.737886
	0.732785	0.738483	0.736317
	0.727845	0.732785	0.739949
	0.747127	0.725228	0.741785
	0.738385	0.739448	0.742688
Среднее значение	0.736897	0.734452	0.739725
Дисперсия значений	5.2E-05	3.31E-05	7.02E-06

Таблица 4

Оценка близости между кластерами разбиения для мультипликативной функции полезности в пространстве Парето за пределами области локального оптимума

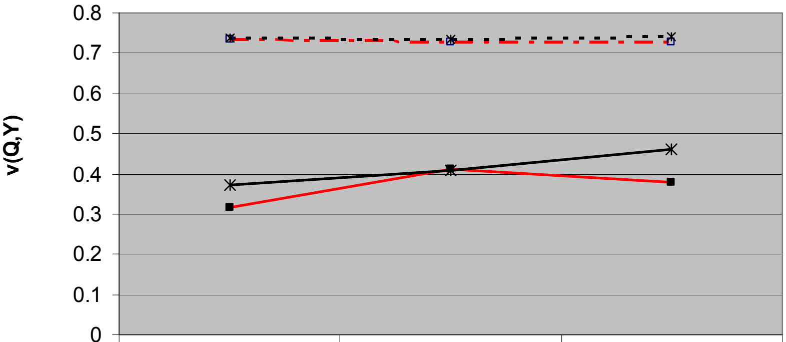
	α_1=1/3 α_2=2/3	α_1=1/2 α_2=1/2	α_1=2/3 α_2=1/3
Значение оценки близости v(Q,Y)	0.293572	0.266913	0.446727
	0.306241	0.357778	0.457185
	0.386594	0.448866	0.468194
	0.429802	0.465325	0.475542
	0.448104	0.498081	0.492694
Среднее значение	0.372863	0.407393	0.461912
Дисперсия значений	0.004954	0.008874	0.000159

Разница оценок близости мультипликативной и аддитивной свёртки между разбиениями по общему и частным критериям в области локального оптимума (по минимуму общего критерия с аддитивной формой свёртки (6) при значении коэффициентов $\alpha_1=1/2,\ \alpha_2=1/2)$ находится в пределах статистической ошибки.

Таким образом, в соответствии с проведёнными выборками (рис) за пределами области локального оптимума из рассмотренных вариантов наименьшее значение оценки близости даёт аддитивная форма свёртки критериев при значении коэффициентов $\alpha_1=1/3,\ \alpha_2=2/3$

$$Q(X)=\left(\frac{\gamma_1(X)-m_{0\max}}{m_{0\min}-m_{0\max}}\right)^{1/3}+\left(\frac{\gamma_2(X)-K_{t\max}}{K_{t\min}-K_{t\max}}\right)^{2/3}. \tag{8}$$

Предложенный метод оценки качества свёртки дает возможность продолжить выбор наилучшего для данного исследования способа свёртки частных критериев и позволяет лицу, принимающему решения, устанавливать весовые коэффициенты не только по общим соображениям, но и уточнять их по критерию потери информации при свёртке критериев.



	a1=1/3 a2=2/3	a1=1/2 a2=1/2	a1=2/3 a2=1/3
Add вблизи оптимума	0.733753144	0.728302763	0.726190289
Mul вблизи оптимума	0.736897227	0.73445222	0.73972471
Add (аддитивный критерий)	0.31557403	0.410063527	0.377657956
Mul (Мультипликативный критерий)	0.372862768	0.407392719	0.461912005

Зависимость меры сходства v(Q,Y) от вида свёртки критериев и весовых коэффициентов α_1, α_2

Выводы:

1. Предложен метод и алгоритм выбора конкретного вида функции полезности при свёртке критериев путём оценки близости решений и потерь информации при свёртке частных критериев с помощью кластерного анализа по методу Варда и оценки близости между кластерами разбиения.
2. Предложенный алгоритм реализован в среде Delphi с применением математического пакета Statgraph для свёртки двух частных критериев на примере оптимизации параметров крыла грузопассажирского самолёта с ТВД, аналогичных параметрам самолёта Ан-140. Показана зависимость результатов оптимизации от параметров алгоритма.

Список литературы

1. Гребеников А.Г. , Варшавьяк Г.Б. . Формирование функции полезности при свёртке критериев векторной оптимизации проектных параметров пассажирского самолёта на этапе предварительного проектирования // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х. :НАКУ «ХАИ», 2007. – Вып. 35 – С. 91-98.
2. Петров Э.Г., Новожилова М.В., Гребенник И.В. Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах. – Донецк: ОЛБИ-Пресс, 2003. – 380 с.
3. Основы общего проектирования самолётов с газотурбинными двигателями/ П.В. Балабуев, С.А. Бычков , А.Г. Гребеников и др. – Х. :НАКУ «ХАИ», 2003. Ч. II. – С. 27-41.
4. АндрейчиковА.В., Андрейчикова О.Н. . Анализ, синтез, планирование решений в экономике – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.