

УДК 621.452.322.02-52:519.876.2

doi: 10.32620/aktt.2023.4sup1.12

С. В. ЄПІФАНОВ, О. В. БОНДАРЕНКО

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТУРБОВАЛЬНОГО ДВИГУНА

Предметом дослідження є процес формування математичних моделей (ММ) турбовального газотурбінного двигуна й дводвигунової силової установки вертольота, які забезпечують визначення параметрів робочого процесу на ustalених і перехідних робочих режимах для використання при оцінюванні динамічних характеристик, при аналізі й синтезі систем автоматичного керування двигуном і вертольотом. **Метою** є обґрунтування структури й методики формування ММ, призначеної для використання в системах реального й прискореного масштабу часу. **Задачі:** реалізація запропонованої раніше структури ММ з урахуванням особливостей турбовального двигуна, розробка методики визначення коефіцієнтів ММ на основі відомої інформації про статичні й динамічні властивості двигуна, формування структури ММ дводвигунової силової установки вертольота. Для цього використовуються **методи** теорії повітряно-реактивних двигунів і теорії лінійних динамічних систем. Отримано наступні **результати:** сформовано структуру багаторежимної швидкодійної ММ турбовального двигуна й дводвигунової силової установки, виконано тестування. **Наукова й практична новизна** отриманих результатів полягає в наступному: сформовано структуру багаторежимної лінеаризованої ММ турбовального двигуна, яка складається зі статичної й динамічної підмоделей, реалізованих у зведених параметрах; методику моделювання відпрацьовано на спрощеній моделі, складеній із урахуванням експертної інформації про статичні й динамічні властивості двигуна в області розрахункового режиму; Отримано формули, які пов'язують коефіцієнти лінійної динамічної моделі зі значеннями сталих часу роторів і значеннями чутливостей, отриманими зі статичних характеристик; визначено перехідні характеристики двигуна за зміною витрати палива й потужності навантаження, що відповідають фізичним уявленням про двигун; сформовано методику моделювання й структуру ММ дводвигунової силової установки, яка відрізняється сполученням індивідуальних статичних і лінійних динамічних моделей двох двигунів з єдиною нелінійною динамічною моделлю ротора вертольота; запропоновано необхідну для відлагодження ММ силової установки спрощена ММ навантаження, яка забезпечує розрахунок потужності, що споживається ротором, залежно від куттового положення лопатей.

Ключові слова: турбовальний газотурбінний двигун; силова установка вертольота; динамічна математична модель.

Вступ

Розробка сучасних цифрових систем автоматичного керування основана на застосуванні математичних моделей (ММ), які використовуються на всіх етапах життєвого циклу – від проектування до експлуатації [1, 2]. Ряд важливих задач вирішується за допомогою математичних моделей силової установки, які моделюють роботу двигунів у складі системи автоматичного керування (САК). Стосовно дводвигунової силової установки вертольота це означає, що ММ має містити підмоделі двигунів, а також вимірювальних, керуючих і виконавчих пристроїв.

Ці моделі забезпечують розв'язання наступних задач:

– перевірка працездатності й синтез програм регулювання двигуна на етапі формування технічного завдання на САК;

– синтез контурів регулювання двигуна з урахуванням їх взаємодії на етапі проектування регулятора;

– визначення динамічних характеристик двигуна в складі САК;

– супровід стендових і льотних випробувань, а також експлуатації САК двигуна;

– моделювання силової установки при синтезі й аналізі САК вертольота;

– моделювання силової установки на тренажері вертольота.

Відомі нечисленні публікації про роботи, в яких використовуються такі ММ [3-5]. Однак вони не містять детальної інформації, достатньої для формування моделі довільної силової установки із заданими характеристиками.

У цій роботі розглянуто задачу формування ММ дводвигунової силової установки вертольоту і її програмна реалізація, що забезпечує можливість застосування в системах реального часу.

1. Формування структури моделі автономного двигуна

Розглянемо турбовальний двигун (ТВаД) з одновальним турбокомпресором, схема й параметри якого представлено на рис. 1.

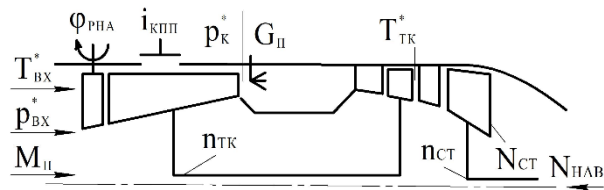


Рис. 1. Схема ТВаД

Таким чином, вектори вхідних і вихідних параметрів мають вигляд

$$\vec{U} = [G_p \quad N_{\text{нав}} \quad \varphi_{\text{РНА}} \quad i_{\text{КПП}} \quad p_{\text{к}}^* \quad T_{\text{ВХ}}^* \quad M_p]^T;$$

$$\vec{Z} = [n_{\text{ТК}} \quad n_{\text{СТ}} \quad p_{\text{к}}^* \quad T_{\text{ТК}}^* \quad N_{\text{СТ}}]^T,$$

де G_p – витрата палива; $N_{\text{нав}}$ – потужність навантаження; $\varphi_{\text{РНА}}$ – кутове положення регульованого напрямного апарата компресора високого тиску (КВП); $i_{\text{КПП}}$ – положення клапана перепускання повітря КВП; $p_{\text{к}}^*$, $T_{\text{ВХ}}^*$ – тиск і температура гальмування на вході до двигуна; M_p – число Маха польоту; $n_{\text{ТК}}$, $n_{\text{СТ}}$ – частоти обертання роторів турбокомпресора й силової турбіни; $p_{\text{к}}^*$ – тиск на виході з компресора; $T_{\text{ТК}}^*$ – температура на виході з турбіни компресора; $N_{\text{СТ}}$ – потужність силової турбіни.

У роботі [6] нами сформульовано вимоги до динамічних ММ двигунів. Одними з найважливіших вимог є простота й висока обчислювальна ефективність, яка забезпечує можливість реалізації в реальному й прискореному масштабі часу. В цій же роботі запропоновано структуру моделі двигуна, яка складається зі статичної й динамічної підмоделей, і обгрунтовано їх конкретну реалізацію для двовального турбореактивного двигуна.

Зважаючи на основні рекомендації [6], сформуємо ММ турбовального двигуна. При цьому необхідно урахувати основну відмінність ТВаД – він має

два ступеня свободи, тобто є два параметри, що визначають режим роботи: параметр режиму газогенератора й параметр режиму силової турбіни.

Відповідно до зазначених рекомендацій, ММ реалізується в формі комбінації нелінійної статичної моделі, яка апроксимує статичні характеристики двигуна, й динамічної моделі, яка описує відхилення параметрів від статичних значень. Динамічна модель є лінійною за структурою й представлена як система рівнянь у просторі станів. Але коефіцієнти цієї моделі залежать від параметрів, які визначають умови роботи двигуна, що визначає нелінійність цієї моделі.

Таким чином, параметри двигуна \vec{Z} , що моделюються, представляються як сума статичної $\vec{Z}_{\text{СТ}}$ й динамічної $\Delta\vec{Z}$ складових:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{\text{СТ}} + \Delta\vec{Z}. \quad (1)$$

Статична складова моделюється як

$$\vec{Z}_{\text{СТ}} = F(\vec{U}), \quad (2)$$

де \vec{U} – вектор вхідних параметрів, до яких належать керувальні й збурювальні впливи, а також параметри польотних умов.

Динамічна складова представляється як комбінація параметрів стану $\Delta\vec{X}$ і додаткових параметрів $\Delta\vec{Y}$: $\Delta\vec{Z} = \begin{bmatrix} \Delta\vec{X} \\ \Delta\vec{Y} \end{bmatrix}$ і є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\vec{X}} &= A\Delta\vec{X} + B\Delta\vec{U}; \\ \Delta\vec{Y} &= C\Delta\vec{X} + D\Delta\vec{U}, \end{aligned} \quad (3)$$

де A , B , C , D – матриці, які залежать від режиму роботи двигуна й зовнішніх умов;

$$\vec{X} = [n_{\text{ТК}} \quad n_{\text{СТ}}]^T; \quad \vec{Y} = [p_{\text{к}}^* \quad T_{\text{ТК}}^* \quad N_{\text{СТ}}]^T.$$

Структуру математичної моделі, сформована згідно з методикою, викладеною в роботі авторів [6], представлено на рис. 2. Як видно, статичні характеристики й коефіцієнти лінійної динамічної моделі (ЛДМ) представлено в зведених параметрах у вигляді функцій, аргументами яких є зведені частоти обертання. Ці функції задано на окремих ділянках характеристики. Кожна ділянка має номер N_d і визначається положенням клапанів перепускання повітря з компресора (КПП) й станом регульованих напрямних апаратів компресора (РНА) (фіксоване мініма-

льне чи максимальне положення, або ділянка регулювання в залежності від зведеної частоти обертання ротора турбокомпресора).

Значення відхилень параметрів керування $\Delta \vec{U}$ визначаються як $\Delta G_{\Pi} = G_{\Pi} - G_{\Pi ст}$; $\Delta N = N_{СТ} - N_{НАВ}$.

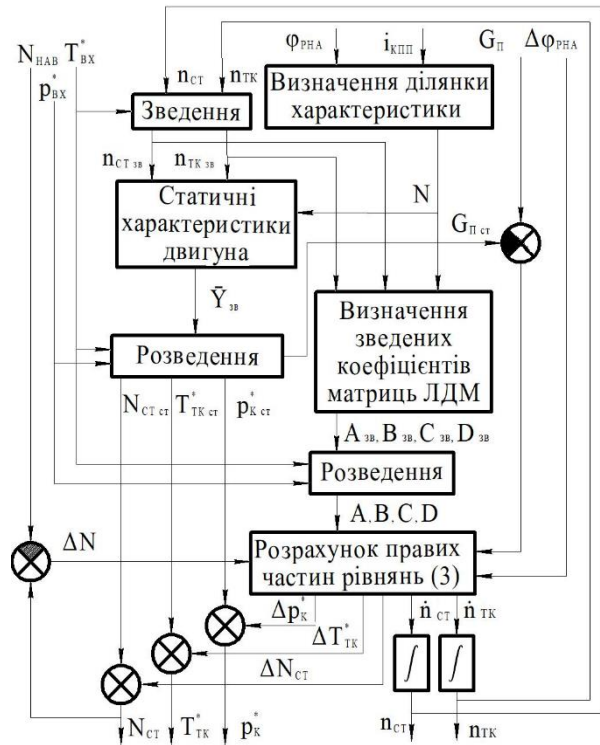


Рис. 2. Структура математичної моделі

Відхилення частот обертання $\Delta \vec{X}$ не використовуються в блоці визначення правих частин системи рівнянь (3), тому що вони дорівнюють нулю внаслідок того, що частоти обертання використовуються як аргументи статичної моделі, і тому динамічні значення частот обертання не відрізняються від статичних.

2. Відпрацювання методики моделювання на спрощеній моделі

Методику моделювання відпрацьовано на спрощеній моделі. Розглянуто один двигун. Приймалося, що його характеристики мають тільки одну ділянку (яка, наприклад, відповідає закритим КПП і регульованому РНА). Розглянуто постійні зовнішні умови, що відповідають параметрам стандартної атмосфери.

2.1. Статична підмодель

Статична підмодель розраховує значення витрати палива, температури газу, тиску за компресором і крутильного моменту силової турбіни $M_{СТ}$ на

усталених режимах роботи двигуна. В її основі – статичні характеристики. Вони є гранично простими, як показано на рис. 3. Для моделювання характеристики потужності використовується представлена на рис. 3, з характеристика крутильного моменту.

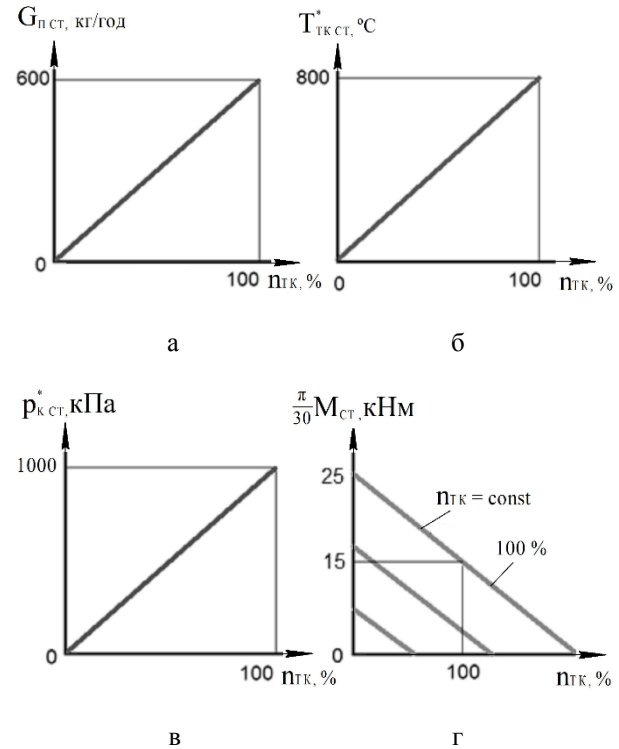


Рис. 3. Графіки, що представляють статичну модель

Таким чином, статичні значення параметрів двигуна визначаються наступними формулами:

$$G_{\Pi ст} = 6 \cdot n_{ТК}, \text{ кг/год}; T_{ТК ст}^* = 8 \cdot n_{ТК}, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$P_{К ст}^* = 10 \cdot n_{ТК}, \text{ кПа};$$

$$N_{СТ ст} = (0.25 \cdot n_{ТК} - 0.1 \cdot n_{СТ}) \cdot n_{СТ}, \text{ кВт}. \quad (4)$$

2.2. Динамічна підмодель

Динамічна підмодель реалізує лінійну динамічну модель двигуна у відхиленнях. Вхідними параметрами є відхилення від статичних значень витрати палива й потужності, а вихідними параметрами – прискорення роторів, а також відхилення від статичних значень температури й потужності силової турбіни.

Система рівнянь (3) має наступний вигляд:

$$\dot{n}_{ТК} = a_{11} \cdot \Delta n_{ТК} + b_{11} \cdot \Delta G_{\Pi}; \quad (5)$$

$$\dot{n}_{СТ} = a_{21} \cdot \Delta n_{ТК} + a_{22} \cdot \Delta n_{СТ} + b_{21} \cdot \Delta G_{\Pi} + b_{22} \cdot \Delta N; \quad (6)$$

$$\Delta p_{К}^* = c_{11} \cdot \Delta n_{ТК} + d_1 \cdot \Delta G_{\Pi}; \quad (7)$$

$$\Delta T_{TK}^* = c_{21} \cdot \Delta n_{TK} + d_2 \cdot \Delta G_{II}; \quad (8)$$

$$\Delta N_{CT} = c_{31} \cdot \Delta n_{TK} + c_{32} \cdot \Delta n_{CT} + d_3 \cdot \Delta G_{II}. \quad (9)$$

Частоти обертання роторів використовуються як аргументи статичної моделі. Тому відхилення цих параметрів від статичних значень дорівнюють нулю, і рівняння (5)-(9) спрощуються:

$$\dot{n}_{TK} = b_{11} \cdot \Delta G_{II}; \quad (10)$$

$$\dot{n}_{CT} = b_{21} \cdot \Delta G_{II} + b_{22} \cdot \Delta N; \quad (11)$$

$$\Delta p_K^* = d_1 \cdot \Delta G_{II}; \quad (12)$$

$$\Delta T_{TK}^* = d_2 \cdot \Delta G_{II}; \quad (13)$$

$$\Delta N_{CT} = d_3 \cdot \Delta G_{II}. \quad (14)$$

Прийmemo значення сталої часу ротора турбокомпресора τ_{TK} рівним 1 с. Зі статичних характеристик, представлених на рис. 3, а, б, виходить, що коефіцієнти підсилення по витраті палива для частот обертання ротора турбокомпресора, тиску й температури газу складають:

$$K_{nTK}^{G_{II}} = \frac{1}{6} \frac{\%}{\text{кг/год}};$$

$$K_{pK}^{G_{II}} = \frac{5}{3} \frac{\text{кПа}}{\text{кг/год}};$$

$$K_{T_{TK}}^{G_{II}} = \frac{4}{3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{кг/год}}.$$

Відхилення витрати палива є єдиним параметром, який впливає на значення відхилення частоти обертання ротора турбокомпресора після закінчення перехідного процесу, коли прискорення ротора стає рівним нулю. Коефіцієнт a_{11} рівняння (5) має значення, обернене значенню сталої часу ротора. Тому коефіцієнт b_{11} рівнянь (5), (10) дорівнює коефіцієнту підсилення по витраті палива, поділеному на сталу часу ротора:

$$b_{11} = \frac{K_{nTK}^{G_{II}}}{\tau_{TK}} = \frac{1/6}{1} = \frac{1}{6} \frac{\%}{\text{кг/год}}.$$

Як видно з (8), на значення відхилення тиску на виході з компресора й температури на виході з турбіни компресора мають вплив відхилення частоти обертання й витрати палива. Тому зі статичних характеристик двигуна ми можемо лише знайти зв'язок між коефіцієнтами рівнянь (7) і (8):

$$c_{11} K_{nTK}^{G_{II}} + d_1 = K_{pK}^{G_{II}}; \quad c_{21} K_{nTK}^{G_{II}} + d_2 = K_{T_{TK}}^{G_{II}}. \quad (15)$$

Прийmemo $c_{11} = 1$, $d_1 = 1.5$; $c_{21} = 2$, $d_2 = 1$; ці значення задовольняють умову (15), такому що $1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$; $2 \cdot \frac{1}{6} + 1 = \frac{4}{3}$.

Визначимо значення коефіцієнтів рівняння (9) для відхилення потужності силової турбіни. Будемо вважати, що потужність СТ визначається головним чином витратою палива (тобто виділенням енергії при згорянні палива), а частота обертання ротора вільної турбіни впливає на ККД силової турбіни і, як результат, на значення її потужності. Тоді вплив частоти обертання ротора турбокомпресора є відсутнім: $c_{31} = 0$.

Для визначення останніх коефіцієнтів рівняння (9) використаємо статичну модель потужності $N_{CT_{CT}} = f(n_{TK_{CT}}, n_{CT_{CT}})$. Тоді

$$c_{32} = \frac{\partial N_{CT_{CT}}}{\partial n_{CT}} = 0.25 \cdot n_{TK} - 0.2 \cdot n_{CT}. \quad (16)$$

$$d_3 = \frac{\partial N_{CT_{CT}}}{\partial G_{II}} = \frac{\partial N_{CT_{CT}}}{\partial n_{TK_{CT}}} \frac{\partial n_{TK_{CT}}}{\partial G_{II}} =$$

$$= 0.25 \cdot n_{CT} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \cdot n_{CT}.$$

Для спрощення не будемо урахувати залежність коефіцієнтів динамічної моделі від режиму роботи двигуна й визначимо їх значення для базового режиму: підставимо у вирази (16) і (17) $n_{TK_{зв}} = n_{CT_{зв}} = 100$. Отримаємо: $c_{32} = 5$; $d_3 = \frac{25}{3}$.

2.3. Отримання й аналіз рівняння динаміки ротора силової турбіни

Для визначення коефіцієнтів рівняння (6) необхідно скористатися наявною інформацією про значення сталої часу ротора СТ, а також про статичну характеристику, яка пов'язує частоту обертання ротора СТ з витратою палива й потужністю. Запишемо рівняння динаміки ротора СТ:

$$J_{CT} \frac{d\omega_{CT}}{dt} = M_{CT} - M_{нав},$$

де J_{CT} , ω_{CT} – момент інерції й кутова частота обертання ротора СТ.

Наведена на рис. 3, з зовнішня характеристика двигуна – статична. На усталених режимах кожному значенню витрати палива відповідає певне значення частоти обертання ротора ТК – вони взаємопов'язані.

Однак на перехідних режимах цей взаємозв'язок порушується, і робота СТ залежить від витрати газу, тиску й температури на вході.

Тиск і витрата газу визначаються перш за все частотою обертання ротора турбокомпресора, тому що вона впливає на параметри компресора. А температура визначається перш за все витратою палива. Тому на перехідних режимах необхідно ураховувати залежність моменту СТ і від витрати палива, і від частоти обертання ротора турбокомпресора, як від незалежних факторів:

$$M_{CT} = f(n_{CT}, G_{п}, n_{TK}).$$

Лінеаризуємо рівняння динаміки ротора СТ, вважаючи, що вплив навантаження не залежить від двигуна й задано значенням потужності $N_{нав}$:

$$J_{CT} \frac{\pi}{30} \frac{dn_{CT}}{dt} = M_{CT} - \frac{N_{нав} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} = \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} \Delta n_{CT} + \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}} \Delta n_{TK} + \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{T}} \Delta G_{п} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \Delta n_{CT} - \frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \Delta N; \quad (18)$$

$$J_{CT} \frac{\pi}{30} \frac{dn_{CT}}{dt} - \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \Delta n_{CT} = \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}} \Delta n_{TK} + \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{T}} \Delta G_{п} - \frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \Delta N,$$

де \bar{n}_0 – масштаб частоти обертання ротора СТ (ціна одного відсотка); $N_{нав 0}$ – значення потужності навантаження на базовому усталеному режимі; ΔN – відхилення потужності навантаження.

Отримаємо рівняння динаміки ротора СТ. Для цього доповнимо рівняння (18) рівнянням динаміки ротора ТК у вигляді

$$\tau_{TK} \frac{dn_{TK}}{dt} + \Delta n_{TK} = K_{н ТК}^{G_{п}} \Delta G_{п}. \quad (19)$$

Виразимо Δn_{TK} з (18) і підставимо в (19):

$$\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}} \Delta n_{TK} = \frac{\pi}{30} J_{CT} \frac{dn_{CT}}{dt} - \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \Delta n_{CT} - \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} \Delta G_{п} + \frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \Delta N;$$

$$\frac{\pi \tau_{TK} J_{CT}}{30} \frac{d^2 n_{CT}}{dt^2} - \tau_{TK} \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \frac{dn_{CT}}{dt} - \tau_{TK} \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} \frac{dG_{п}}{dt} + \frac{30 \tau_{TK}}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \frac{dN}{dt} + \frac{\pi J_{CT}}{30} \frac{dn_{CT}}{dt} - \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \Delta n_{CT} - \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} \Delta G_{п} + \frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \Delta N = K_{н ТК}^{G_{п}} \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}} \Delta G_{п};$$

$$\frac{\pi \tau_{TK} J_{CT}}{30} \frac{d^2 n_{CT}}{dt^2} + \left[\frac{\pi J_{CT}}{30} - \tau_{TK} \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \right] \frac{dn_{CT}}{dt} - \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{нав 0} 30}{n_{CT}^2 \bar{n}_0 \pi} \right) \Delta n_{CT} = \tau_{TK} \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} \frac{dG_{п}}{dt} + \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} + K_{н ТК}^{G_{п}} \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}} \right) \Delta G_{п} - \frac{30 \tau_{TK}}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \frac{dN}{dt} - \frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} \Delta N. \quad (20)$$

Перетворивши отримане рівняння до стандартної форми, в якій коефіцієнт при відхиленні вихідного параметра (в даному випадку – частоти обертання ротора СТ) дорівнює 1, отримаємо:

$$\tau_{CT} \tau_{TK} \frac{d^2 n_{CT}}{dt^2} + (\tau_{CT} + \tau_{TK}) \frac{dn_{CT}}{dt} + \Delta n_{CT} = K_{н СТ}^{G_{п}} \left(\tau_1 \frac{dG_{п}}{dt} + \Delta G_{п} \right) + K_{н СТ}^N \left(\tau_2 \frac{dN}{dt} + \Delta N \right), \quad (21)$$

$$\text{де } \tau_{CT} = - \frac{J_{CT}}{\frac{30}{\pi} \left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{30}{\pi} \frac{N_{нав 0}}{n_{CT}^2 \bar{n}_0} \right)};$$

$$K_{н СТ}^{G_{п}} = - \frac{\frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} + K_{н ТК}^{G_{п}} \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}}}{\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{30}{\pi} \frac{N_{нав 0}}{n_{CT}^2 \bar{n}_0}};$$

$$K_{н СТ}^N = \frac{1}{\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} \frac{\pi n_{CT} \bar{n}_0}{30} + \frac{N_{нав 0}}{n_{CT}}};$$

$$\tau_1 = - \frac{\tau_{TK} \frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{T}}}{\frac{\partial M_{CT}}{\partial G_{п}} + K_{н ТК}^{G_{п}} \frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{TK}}}; \quad \tau_2 = \tau_{TK}.$$

Покажемо, що в області режимів роботи двигуна, близькій до базового режиму ($n_{TK} = 100\%$; $n_{CT} = 100\%$) для прикладу, що розглядається, значення коефіцієнта τ_{CT} є від'ємним, що відповідає нестійкому стану ротора СТ.

Визначимо знаки параметрів, які входять до виразу для τ_{CT} . Очевидно, $J_{CT} \frac{\pi}{30} > 0$, $\frac{\partial M_{CT}}{\partial G_n} > 0$, $\frac{30}{\pi n_{CT} \bar{n}_0} > 0$. У прикладі, що розглядається,

$$N_{CT} = (0.25 \cdot n_{TK} - 0.1 \cdot n_{CT}) \cdot n_{CT} \text{ кВт},$$

$$M_{CT} (\text{Нм}) = \frac{N_{CT} (\text{Вт})}{\omega (\text{рад/с})} = \frac{N_{CT} \cdot 1000 \cdot 30}{n_{CT} \bar{n}_0 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot 10^4}{\pi \bar{n}_0} (0.25 \cdot n_{TK} - 0.1 \cdot n_{CT}).$$

При $n_{TK} = 100\%$, $n_{CT} = 100\%$ отримаємо:

$$\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} \left(\frac{\text{Нм}}{\%} \right) = \frac{\partial}{\partial n_{CT}} \left[\frac{3 \cdot 10^4}{\pi \bar{n}_0} (0.25 \cdot n_{TK} - 0.1 \cdot n_{CT}) \right] = -\frac{3 \cdot 10^3}{\pi \bar{n}_0} \approx -6.37 \text{ Нм/\%}.$$

$$\frac{N_{\text{нав } 0}}{n_{CT}^2 \bar{n}_0} \frac{30}{\pi} = \frac{1500 \cdot 10^3 \cdot 30}{100^2 \cdot 150 \cdot \pi} \approx 9.55 \text{ Нм/\%}.$$

Значення коефіцієнта при відхиленні частоти обертання в рівнянні (20):

$$-\left(\frac{\partial M_{CT}}{\partial n_{CT}} + \frac{N_{\text{нав } 0}}{n_{CT}^2 \bar{n}_0} \frac{30}{\pi} \right) = -(-6.37 + 9.55) = -3.18, \text{ Нм/\%}.$$

Таким чином, значення цього коефіцієнта є від'ємним. З урахуванням знаків інших коефіцієнтів рівняння (18), це означає, що ротор СТ є нестійким об'єктом, а його умовна стала часу τ_{CT} є від'ємною.

У прикладі, що розглядається, нехай $\tau_{CT} = -3$ с.

Рівняння (6) є альтернативною формою запису рівняння (18). Тоді коефіцієнти рівняння (6) пов'язані з коефіцієнтами рівняння (18) наступним чином:

$$a_{22} = \frac{1}{\tau_{CT}}; b_{21} = \frac{K_n^G}{\tau_{CT}}; b_{22} = \frac{K_n^N}{\tau_{CT}}. \quad (22)$$

Щоб знайти коефіцієнти підсилення частоти обертання ротора СТ за витратою палива й потужністю, отримаємо статичну залежність $n_{CT} = f(G_n, N_{CT})$.

Для цього використаємо статичну модель потужності (4). Розглянемо вираз для потужності $N_{CT} = (0.25 \cdot n_{TK} - 0.1 \cdot n_{CT}) \cdot n_{CT}$ як квадратне рівняння відносно частоти обертання ротора СТ:

$$0.1 \cdot n_{CT}^2 - 0.25 \cdot n_{TK} \cdot n_{CT} + N_{CT} = 0, \quad \text{або}$$

$$n_{CT}^2 - 2.5 \cdot n_{TK} \cdot n_{CT} + 10 \cdot N_{CT} = 0. \quad (23)$$

Розв'язок

$$n_{CT} = \frac{2.5}{2} n_{TK} \pm \sqrt{\frac{6.25}{4} n_{TK}^2 - 10 \cdot N_{CT}}. \quad (24)$$

Ця залежність представлена на рис. 4. З рисунка видно, що існують такі малі значення частоти обертання турбокомпресора, при яких задану потужність не може бути отримано. Аналіз формули (24) показує, що при заданій потужності значення n_{TK} мають задовольняти умову

$$n_{TK} > \frac{2}{2.5} \sqrt{10 \cdot N_{CT}} \approx 2.53 \sqrt{N_{CT}}, \quad (25)$$

а мінімальні значення визначаються лінією $n_{CT} = 1.25 n_{TK \text{ min}}$, показаною на рис. 4 пунктиром.

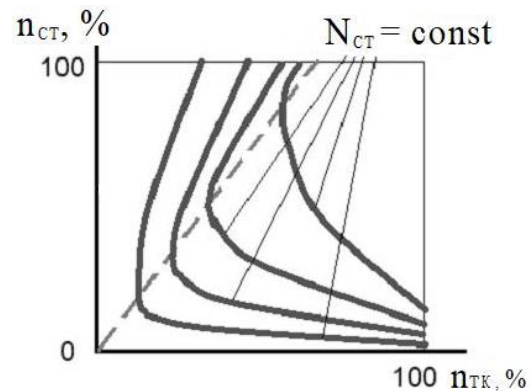


Рис. 4. Залежність частоти обертання ротора силової турбіни від частоти обертання турбокомпресора при постійних значеннях потужності силової турбіни

Формула (24) є статичною моделлю для n_{CT} , якщо вхідними параметрами є G_n і N_{CT} . Тоді її можливо використати для визначення коефіцієнтів підсилення частоти обертання силової турбіни за цими вхідними параметрами:

$$K_{n_{CT}}^{G_{II}} = \frac{\partial n_{CT}}{\partial G_{II}} = \frac{\partial n_{CT}}{\partial n_{TK}} \frac{\partial n_{TK}}{\partial G_{II}} = \left(1.25 \pm \frac{\frac{6.25}{2} n_{TK}}{2 \sqrt{\frac{6.25}{4} n_{TK}^2 - 10 \cdot N_{CT}}} \right) \frac{1}{6}; \quad (26)$$

$$K_{n_{CT}}^N = \frac{\partial n_{CT}}{\partial N} = \mp \frac{5}{\sqrt{\frac{6.25}{4} n_{TK}^2 - 10 \cdot N_{CT}}}. \quad (27)$$

З рис. 4 витікає, що знак «-» в формулах (24), (26) (плюс в (27)) відповідає верхній області характеристики, тобто більшим значенням частоти обертання ротора СТ при заданій потужності, а протилежні знаки – нижній області. У цих областях динамічна модель ротора СТ має різні властивості (наприклад, різні знаки чутливості до зміни потужності). Це необхідно враховувати при формуванні більш точної моделі.

У даній спрощеній моделі буде використано значення коефіцієнтів, які відповідають максимальному режиму ($n_{TK}=n_{CT}=100\%$; $N=1500$ кВт). Область максимального режиму, як показує рис. 4, відповідає нижній частині характеристики, тому в формулах (26), (27) використовуємо знак «+». Отримаємо:

$$K_{n_{CT}}^{G_{II}} = \left(1.25 + \frac{\frac{6.25}{2} 100}{2 \sqrt{\frac{6.25}{4} 10000 - 10 \cdot 1500}} \right) \frac{1}{6} = 7.5 \frac{\%}{\text{кг/год}};$$

$$K_{n_{CT}}^N = - \frac{5}{\sqrt{\frac{6.25}{4} 10000 - 10 \cdot 1500}} = -0.2 \frac{\%}{\text{кВт}}.$$

Підставивши ці значення в формули (22), отримаємо:

$$b_{21} = \frac{K_{n_{CT}}^{G_{II}}}{\tau_{CT}} = -2.5 \frac{\%}{(\text{кг/год}) \cdot \text{с}};$$

$$b_{22} = \frac{K_{n_{CT}}^N}{\tau_{CT}} = \frac{1}{15} \frac{\%}{\text{кВт} \cdot \text{с}}. \quad (28)$$

2.4. Тестування спрощеної моделі

Для перевірки працездатності й тестування моделі її було реалізовано засобами Matlab Simulink,

сформовано впливи й організовано реєстрацію результатів розрахунків. Відповідна структура передбачала можливість завдання постійних значень або стрибкоподібної зміни витрати палива й потужності навантаження. Вихідні параметри реєструвалися у вигляді графіків, які представляють їх зміну за часом.

На рис. 5 представлено зміну параметрів при стрибкоподібному зниженні витрати палива на 20 кг/год і постійній потужності навантаження 1500 кВт.

На рис. 6 представлено зміну параметрів силової турбіни при стрибкоподібному зниженні потужності навантаження на 5-й секунді з 1500 до 1350 кВт. Параметри газогенератора (частота обертання турбокомпресора й температура газу) на цю зміну не реагують, тому що витрата палива залишилась постійною, а модель сформована за умов припущення про те, що силова турбіна не впливає на роботу турбокомпресора.

Представлені на рис. 5, 6 результати підтверджують обґрунтованість математичної моделі, тому що амплітуда й характер зміни параметрів за часом відповідають вихідним статичним характеристикам і заданим сталим часу роторів.

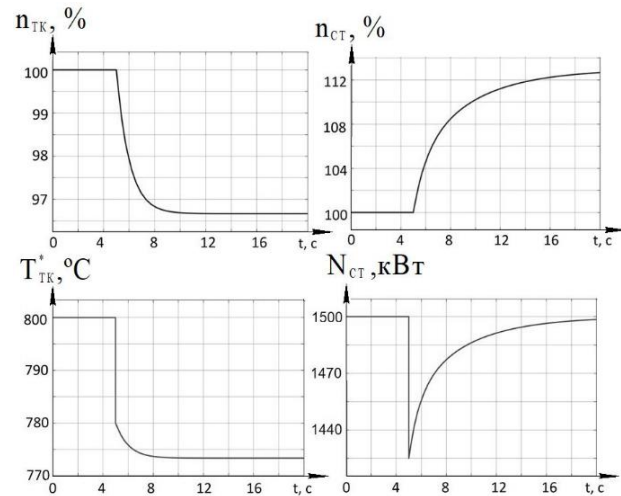


Рис. 5. Приклад перехідних характеристик двигуна при зміні витрати палива

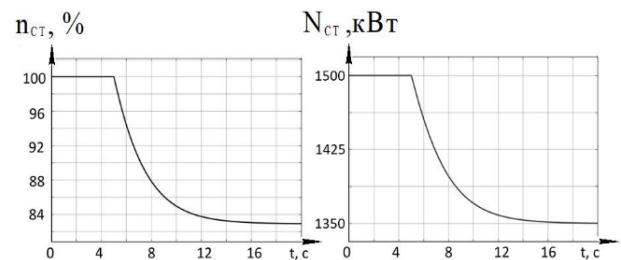


Рис. 6. Приклад перехідних характеристик при зміні потужності навантаження

3. Моделювання динаміки ротора вертольота з дводвигуною силовою установкою

Для моделювання дводвигуною силовою установкою представлена вище модель має обмежене застосування, тому що для її прямого використання необхідно ввести припущення про те, що обидва двигуни є абсолютно ідентичними, внаслідок чого їх сумарна потужність завжди (тобто і на усталених, і на перехідних режимах) дорівнює подвійній потужності одного двигуна. Така модель є цілком достатньою для моделювання штатної роботи силової установки в складі моделі вертольота (наприклад, на тренажері). Однак вона є непридатною для відпрацювання ряду задач розроблення системи керування (наприклад, синхронізації двигунів) а також імітації роботи силової установки при виникненні несправностей двигуна.

Тому необхідно розробити таку модель, у якій кожен двигун представлений окремою моделлю, в результаті чого двигуни можуть мати різні режими роботи (наприклад, один з них вимкнено, або переведено на режим підвищеної потужності, або відрізняється від іншого двигуна наявністю несправностей, відборів повітря чи потужності).

У той же час необхідно забезпечити для обох двигунів однакові значення таких параметрів, як зовнішні умови й частота обертання ротора силової турбіни.

Структура ММ дводвигуною силової установки, яка відповідає цим вимогам, представлена на рис. 7.

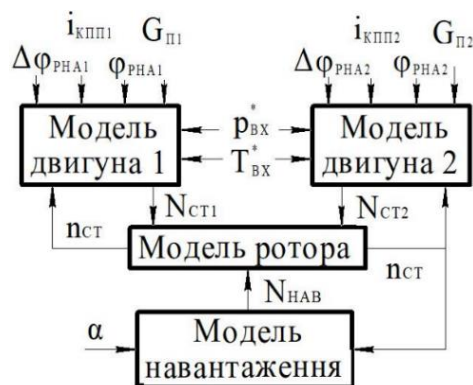


Рис. 7. Структура моделі дводвигуною силової установки

Для кожного двигуна використовується представлена вище (див. рис. 7) ММ з наступною модифікацією: зі складу динамічної підмоделі виключено рівняння динаміки ротора силової турбіни (6) або (11).

Моделлю ротора є диференціальне рівняння динаміки ротора:

$$J_{СТ} \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \frac{dn_{СТ}}{dt} = \frac{N_{СТ1} + N_{СТ2} - N_{НАВ}}{n_{СТ}}. \quad (29)$$

Розглянувши схему сполучення двигунів із трансмісією вертольота, можна дійти висновку, що параметр $J_{СТ}$, що входить до цього рівняння, лише умовно можна назвати моментом інерції силової турбіни. В дійсності це сумарний момент інерції обертової роторної системи, зведений до частоти обертання силової турбіни.

На відміну від моделей двигунів, нелінійне рівняння (29) не лінеаризується, а розв'язується будь-яким числовим методом.

Представлена на рис. 7 модель навантаження не входить до складу моделі силової установки. Проте вона є необхідною для її відлагодження. Звісно, найкраще використовувати ММ ротора вертольота. Тоді як вхідний параметр α можна розглядати кутове положення лопатей ротора. Якщо ММ ротора є невідомою, то можна скористатися відомим співвідношенням між потужністю повітряного гвинта й частотою обертання: потужність пропорційна кубові частоти обертання. Задавши довільно залежність коефіцієнта пропорційності від вхідного параметра α , отримаємо:

$$N_{НАВ} = C(\alpha) n_{СТ}^3. \quad (30)$$

Залежність $C(\alpha)$ обирається так, щоб при базових значеннях кутового положення лопатей α_0 і частоти обертання ротора $n_{СТ0} = 100\%$ отримати базове значення потужності N_0 .

Програмну реалізацію й практичне використання цієї моделі дводвигуною силовою установкою вертольота буде розглянуто в наступній публікації.

Висновки

У процесі аналізу задачі моделювання силової установки вертольота отримано такі основні результати:

1. Сформовано структуру багаторежимної лінеаризованої ММ турбовального двигуна, яка складається зі статичної і динамічної підмоделей, реалізованих у зведених параметрах.

2. Методику моделювання відпрацьовано на спрощеній моделі, складеній з урахуванням експертної інформації про статичні й динамічні властивості двигуна в області базового режиму роботи.

3. Отримано формули, які пов'язують коефіцієнти лінійної динамічної моделі зі значеннями сталих часу роторів і значеннями чутливостей, отриманими зі статичних характеристик. Їх використання забезпечує ефективну перевірку результатів автоматичного

формування лінійної динамічної моделі на основі вихідної нелінійної повузлової моделі.

4. Визначено перехідні характеристики двигуна за зміною витрати палива й потужності навантаження, які відповідають фізичним уявленням про двигун.

5. Сформовано методику моделювання й структуру ММ дводвигунової силової установки, яка відрізняється поєднанням індивідуальних статичних і лінійних динамічних моделей двох двигунів із єдиною нелінійною динамічною моделлю ротора вертольота.

6. Запропоновано необхідну для відлагодження ММ силової установки спрощену ММ навантаження, яка забезпечує визначення потужності, яку споживає ротор, залежно від кутового положення лопатей.

На наступних етапах роботи планується реалізувати моделі двигуна й дводвигунової силової установки з використанням характеристик реального двигуна, а також із урахуванням зворотних зв'язків, що накладає на двигуни система автоматичного керування.

Внесок авторів: формулювання проблеми – **С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко**; огляд та аналіз інформаційних джерел – **С. В. Єпіфанов**; формування структури математичної моделі турбовального двигуна – **О. В. Бондаренко**; розробка методики та визначення кількісних значень коефіцієнтів спрощеної ММ – **С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко**; розробка структури математичної моделі дводвигунової силової установки – **С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко**.

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Jaw, L. C. *Aircraft engine controls: design, system analysis, and health monitoring [Text]* / L. C. Jaw, J. D. Mattingly. – American institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, USA, 2009. – 385 p.
2. *Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей [Текст]* / С. В. Єпіфанов, Б. И. Кузнецов, Г. Г. Грабовский, В. А. Дюков, С. А. Кузьменко, Н. А. Рюмишин, А. А. Самецкий. – К. : Техника, 1998. – 312 с.
3. *Design of PI controller with three-loop structure for power balance of turboshaft [Text]* / Y. Chao, W. Xi, L. Mengni, S. Ruijun, G. Shihuang // *Proc of ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition, 16-20 June 2014. – Dusseldorf, Germany, 2014. – GT2014-27338. 2014. – 13 p. DOI: 10.1115/GT2014-27338.*

4. *Research of nonlinear model predictive control for turboshaft engines base on double engines torques matching [Text]* / W. Yong, Z. Qian'gang, D. Ziyang, Z. Haibo // *Chinese Journal of Aeronautics*. – 2020. – Vol. 33, Iss. 2. – P. 561-571. DOI: 10.1016/j.cja.2019.10.008.

5. *Linear model of a turboshaft aero-engine including components degradation for control-oriented applications [Text]* / T. Castiglione, D. Perrone, L. Strafella, A. Ficarella, S. Bova // *Energies*. – 2023. – Vol. 16, Iss. 6. – Article No. 2634. – 18 p. DOI: 10.3390/en16062634.

6. Єпіфанов, С. В. *Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю [Текст]* / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. – № 4(188). – С. 44-55. DOI: 10.32620/akt.2023.4.05.

References

1. Jaw, L. C. & Mattingly, J. D. *Aircraft engine controls: design, system analysis and health monitoring*. American institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, USA, 2009. 385 p.
2. Yepifanov, S. V., Kuznetsov, B. I. Grabovskij, G. G., Djukov, V. A., Kuz'menko, S. A., Rjumshin, N. A. & Sameckij, A. A. *Sintez sistem upravleniya i diagnostirovaniya gazoturbinnnykh dvigateley* [Synthesis of turbine engine automatic control and diagnostic systems]. Kiev, Tekhnika Publ, 1998. 312 p.
3. Chao, Y., Xi W., Mengni, L., Ruijun, S. & Shihuang, G. Design of PI controller with three-loop structure for power balance of turboshaft. *Proc of ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*. Dusseldorf, Germany, 2014, GT2014-27338. 13 p. DOI: 10.1115/GT2014-27338.
4. Yong, W., Qian'gang, Z., Ziyang, D. & Haibo, Z. Research of nonlinear model predictive control for turboshaft engines based on double engines torques matching. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, vol. 33, iss. 2, pp. 561-571. DOI: 10.1016/j.cja.2019.10.008.
5. Castiglione, T., Perrone, D., Strafella, L., Ficarella, A. & Bova, S. Linear model of a turboshaft aero-engine including components degradation for control-oriented applications. *Energies*, 2023, vol. 16, iss. 6, article no. 2634. 18 p. DOI: 10.3390/en16062634.
6. Yepifanov, S. V. & Bondarenko, O.V. *Formuvannia dynamichnykh modelei hazoturbinnnykh dvyhuniv dlia vykorystannia v systemakh avtomatichnoho keruvannia ta kontroliu* [Formation of dynamic models of gas turbine engines for use in automatic control and diagnostic systems]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2023, no. 4(188), pp. 44-55. DOI: 10.32620/akt.2023.4.05

FORMING OF TURBOSHAFT ENGINE MATHEMATICAL MODEL

Sergiy Yepifanov, Oleksii Bondarenko

The subject of the study is the process of forming a mathematical model (MM) of a turboshaft gas turbine engine and a twin-engine helicopter power plant, which provides the determination of parameters of the working process in steady and transient operating modes for use in the estimation of dynamic characteristics, in the analysis and synthesis of engine and helicopter automatic control systems. **The goal** is to substantiate the structure and methodology of MM formation intended for use in real and accelerated time scale systems. **Tasks:** implementation of the previously proposed MM structure taking into account the turboshaft engine performances, development of a methodology for determining the MM coefficients based on known information about the static and dynamic properties of the engine, and formation of the MM structure of a two-engine helicopter power plant. For this, the methods of the theory of airjet engines and the theory of linear dynamic systems are used. The following **results** were obtained: the structure of a multimode high-speed MM of a turboshaft engine and a two-engine power plant was formed and tested. **The scientific and practical novelty** of the obtained results is as follows: the structure of the multimode linearized MM of the turboshaft engine is formed, which consists of static and dynamic submodels implemented in corrected parameters; the modeling technique was worked out on a simplified model, compiled considering expert information about the static and dynamic properties of the engine in the considered operation area. Formulas were obtained that relate the coefficients of the linear dynamic model to the values of the time constants of the rotors and the sensitivities obtained from the static characteristics; transient characteristics of the engine based on changes in fuel consumption and load power are determined, which correspond to physical knowledge about the engine; the modeling methodology and MM structure of a two-engine power plant were formed, which is distinguished by the combination of individual static and linear dynamic models of two engines with a single nonlinear dynamic model of the helicopter rotor; a simplified MM load necessary for testing the MM of the engine installation is proposed, which provides the calculation of the power consumed by the rotor, depending on the angular position of the blades.

Keywords: turboshaft gas turbine engine; helicopter power plant; dynamic mathematical model.

Спіфанов Сергій Валерійович – д-р техн. наук., проф., зав. каф. конструкції авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет», Харків, Україна.

Бондаренко Олексій Васильович – асп. каф. конструкції авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет», Харків, Україна.

Sergiy Yepifanov – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Aircraft Engine Design Department, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: s.yepifanov@khai.edu, ORCID: 0000-0003-0533-9524, Scopus Author ID: 6506749318.

Oleksii Bondarenko – PhD Student of the Aircraft Engine Design Department, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: o.v.bondarenko@khai.edu, ORCID: 0000-0001-7943-8555.